МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ПГУ)

О. В. Болотникова, Д. В. Тарасов, Р. В. Тарасов

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ: СИМПЛЕКС-МЕТОД И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Учебное пособие

Пенза

Издательство ПГУ

2015

УДК 519.8
Б79

Р е ц е н з е н т ы :

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой физики
Пензенского государственного университета
М. Б. Семенов;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики,
математики и общегуманитарных наук Пензенского филиала
Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
С. Ю. Петропавловская

Болотникова, О. В.

Б79 Линейное программирование: симплекс-метод и двойственность : учеб. пособие / О. В. Болотникова, Д. В. Тарасов, Р. В. Тарасов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. – 84 с.

ISBN 978-5-906831-36-1

Работа содержит детальное рассмотрение постановки задач линейного программирования, алгоритм симплекс-метода, понятие двойственности и задачи целочисленного программирования. Изложение материала сопровождается подробными примерами применения существующих методов линейного программирования. Кроме того, имеются задачи для самостоятельного решения и 30 вариантов заданий для индивидуальных работ.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» (профиль «Математическое моделирование в экономике и технике»), 19.07.00 «Технология транспортных процессов» (профиль «Организация безопасности движения»), а также для бакалавров обучающихся по экономическим направлениям.

УДК 519.8

ISBN 978-5-906831-36-1

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методы оптимизации – это дисциплина, охватывающая широкий круг как классических экстремальных задач (без ограничений и с ними), так и зачастую алгоритмы линейного программирования (симплекс-метод и двойственность, целочисленное программирование), нелинейного программирования, а также транспортные и сетевые модели, методы прогнозирования и принятия решений, стохастические методы управления запасами.

Задачи линейного программирования были первыми подробно изученными задачами поиска экстремума функций при наличии ограничений типа неравенств. В1820 г. Фурье и затем в 1947 г. Данциг предложили метод направленного перебора смежных вершин в направлении возрастания целевой функции – симплекс-метод, ставший основным при решении задач линейного программирования.

Присутствие в названии дисциплины термина «программирование» объясняется тем, что первые исследования и первые приложения линейных оптимизационных задач были в сфере экономики, так как в английском языке слово «programming» означает планирование, составление планов или программ. Вполне естественно, что терминология отражает тесную связь, существующую между математической постановкой задачи и ее экономической интерпретацией. Термин «линейное программирование» был предложен Данцигом в 1949 г. для изучения теоретических и алгоритмических задач, связанных с оптимизацией линейных функций при линейных ограничениях.

Выделение класса экстремальных задач, определяемых линейным функционалом на множестве, задаваемом линейными ограничениями, следует отнести к 1930-м гг. Одними из первых, кто исследовали в общей форме задачи линейного программирования, были Джон фон Нейман – математик и физик, доказавший основную теорему о матричных играх и изучивший экономическую модель, носящую его имя, и Л. В. Канторович – советский академик, лауреат Нобелевской премии (1975), сформулировавший ряд задач линейного программирования и предложивший в 1939 г. метод их решения (метод разрешающих множителей), незначительно отличающийся от симплекс-метода.

Линейное программирование успешно применяется в военной области, индустрии, сельском хозяйстве, транспортной отрасли, экономике, системе здравоохранения и даже в социальных науках. Широкое использование этого метода подкрепляется высококвалифицированными компьютерными алгоритмами, реализующими данный метод.

В 1931 г. венгерский математик Б. Эгервари рассмотрел математическую постановку и решил задачу линейного программирования, имеющую название «проблема выбора», метод решения получил название «венгерский метод».

Л. В. Канторовичем совместно с М. К. Гавуриным в 1949 г. разработан метод потенциалов, который применяется при решении транспортных задач. В последующих работах Л. В. Канторовича, В. В. Новожилова, А. Л. Лурье, А. Брудно, Д. Б. Юдина, Е. Г. Гольштейна и других математиков и экономистов получили дальнейшее развитие как математическая теория линейного и нелинейного программирования, так и приложение ее методов к исследованию различных экономических проблем.

Одновременно с развитием линейного программирования большое внимание уделялось задачам нелинейного программирования, в которых либо целевая функция, либо ограничения, либо то и другое нелинейны. В 1951 г. была опубликована работа Г. Куна и А. Таккера, в которой приведены необходимые и достаточные условия оптимальности для решения задач нелинейного программирования. Эта работа послужила основой для последующих исследований в этой области.

1 ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача об использовании сырья

При производстве n видов продукции используется m видов сырья. Известны запасы сырья каждого вида – b_i $(i=1,2,\ldots,m)$; количество единиц i-го сырья, затрачиваемого на изготовление единицы j-й продукции – a_{ij} $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$; прибыль, получаемая при реализации единицы j-й продукции – c_j $(j=1,2,\ldots,n)$.

Требуется составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

Задача (модель) линейного программирования. Пусть x_j – количество единиц j-й продукции, которое необходимо произвести. Тогда, учитывая количество единиц сырья, затрачиваемого на изготовление единицы продукции, а также запасы сырья, получим систему ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\ (j=1,2,\ldots,n).$$

Получение максимальной прибыли при реализации продукции выразим как функцию $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, максимальное значение которой надо найти при данных ограничениях.

Задача составления рациона

При откорме каждое животное ежедневно должно получить m видов питательных веществ. Для составления рациона используют n видов кормов. Известны количество питательных веществ каждого вида, не менее которого животное должно получить ежедневно – b_i $(i=1,2,\ldots,m)$; количество единиц питательного вещества, содержащегося в единице j-го корма – a_{ij} $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$; стоимость единицы j-го корма – c_j $(j=1,2,\ldots,n)$.

Требуется составить дневной рацион нужной питательности, затраты на который минимальны.

Задача (модель) линейного программирования. Пусть x_j – количество единиц j-го корма в дневном рационе. Тогда, учитывая количество единиц питательного вещества в единице корма и условие, что дневной рацион удовлетворяет требуемой питательности только в случае, если количество единиц питательных веществ не менее предусмотренного, получим систему ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Получение минимальных затрат на дневной рацион нужной питательности выразим как функцию $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, минимальное значение которой нужно найти при данных ограничениях.

Задача об использовании посевных площадей

Для засева n сельскохозяйственных культур имеется m земельных угодий (полей).

Известны площадь каждого поля – $a_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$, план производства каждой сельскохозяйственной культуры – $b_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$, урожайность на i-м поле j-й культуры – $a_{ij} \ (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$, закупочные цены на каждую сельскохозяйственную культуру – $c_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$.

Необходимо составить план засева посевных площадей, обеспечивающий максимальный доход от продажи сельскохозяйственной продукции.

Задача (модель) линейного программирования. Пусть x_{ij} – площадь на i-м поле, занятая j-й культурой. Тогда, учитывая урожайность каждой культуры на каждом поле и заданный план производства, получим систему ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \cdots + a_{m1}x_{m1} \ge b_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \cdots + a_{m2}x_{m2} \ge b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_{1n} + a_{2n}x_{2n} + \cdots + a_{mn}x_{mn} \ge b_n, \\ x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n).$$

Получение максимального дохода от продажи сельскохозяйственной продукции выразим как функцию

$$Z = c_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_{21} + \ldots + a_{m1}x_{m1}) +$$

$$+c_2(a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{m2}x_{m2}) + \ldots + c_n(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_{2n} + \ldots + a_{mn}x_{mn}),$$

максимальное значение которой надо найти при данных ограничениях.

В каждой из рассмотренных задач переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ входят в функцию Z и в систему ограничений в первой степени, а показатели a_{ij}, b_i, c_j $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ в первых двух задачах, a_{ij}, a_i, b_j, c_j $(i = 1, 2, \ldots, m;\ \ j = 1, 2, \ldots, n)$ в третьей задаче являются постоянными, поэтому рассмотренные задачи представляют собой типичные задачи линейного программирования.

Построенная линейная функция Z выражает конечную цель оптимального планирования, поэтому называется ***целевой функцией*** (***или линейной формой***). Эта функция совместно с системой ограничений образует математическую модель.

Математическая модель – это приближенное описание какого-либо класса явлений, выраженное с помощью математической символики.

2 ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В общем случае задача линейного программирования сводится к отысканию такого решения $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ системы m линейных уравнений с n переменными (***системы ограничений***)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_{ij} \geq 0 \; (j = 1, 2, \ldots, n),$$

при котором ***целевая функция*** (линейная форма) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + {}$ $+ \ldots + c_nx_n$ принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

Всякое неотрицательное решение системы (1) называется ***допустимым решением***, или ***планом***.

Решение $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, при котором функция Z обращается в оптимум, называется ***оптимальным решением*** или ***оптимальным планом***. В отыскании этого оптимального решения и состоит задача линейного программирования.

Как правило, оптимальное решение единственно. Однако это не всегда так. Возможны случаи, когда оптимальных решений оказывается бесконечное множество.

В задачах линейного программирования коэффициенты a_{ij}, b_j, c_j – заданные постоянные величины, а число уравнений меньше числа переменных, т.е. $m < n$ (согласно теореме Кронекера – Капелли для совместности системы линейных алгебраических уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы равнялся рангу расширенной матрицы этой системы. Этот общий ранг не может превосходить числа n неизвестных. При $m = n$ решение системы единственно).

Без ограничения общности можно считать, что все правые части системы неотрицательны, т.е. $b_i \geq 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots, m)$. Если в некоторых уравнениях системы это условие нарушено, то можно умножить обе части таких уравнений на –1.

В более короткой форме задача линейного программирования записывается так: найти решение $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ системы ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \left(i = 1, 2, \ldots, m\right),$$

приводящее к оптимуму линейную форму

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условии, что $x_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Эта же система может быть записана в ***векторной форме***:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = B,\ \ Z = C \cdot X,$$

где символ « $\cdot$ » – знак скалярного произведения

$$C = \left(c_1; c_2; \ldots; c_n\right), X = \left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right),$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Еще для записи системы ограничений используется ***матричная форма***: $Z = C \cdot X$ при ограничениях $AX = B$, где

$$C = (c_1\ c_2\ \ldots c_n)\ \text{(матрица-строка)},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \left(\text{матрица-столбец}\right), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \left(\text{матрица-столбец}\right),$$

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A называют матрицей условий задач, B – матрицей ограничений.

Задача линейного программирования, система ограничений которой задана в виде системы уравнений (1), называется ***канонической***.

В большинстве задач ограничения задаются не в виде системы уравнений, а в виде системы линейных неравенств:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m
\end{cases}
\tag{2}
$$

или

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m.
\end{cases}
\tag{3}
$$

Наконец, система ограничений может быть смешанной: часть ограничений – неравенства типа (2), часть – типа (3), часть задана в виде уравнений.

Однако любую систему ограничений можно привести к системе уравнений вида (1). Для этого достаточно к левой части каждого неравенства (2) прибавить (отнять, если система задана в виде (3)) какое-то неотрицательное число – добавочную переменную, чтобы каждое неравенство обратилось в уравнение:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m,
\end{cases}
$$

где $x_{n+i} \ge 0 \ \ (i = 1, 2, \dots, m)$.

В результате вместо системы неравенств (2) получили систему ограничений, аналогичную системе (1).

В случае смешанных систем ограничений число добавочных переменных равно $(m - t)$, где m – общее число ограничений системы, t – число ограничений в виде уравнений.

Таким образом, как бы ни были первоначально заданы ограничения задачи линейного программирования, их всегда можно привести к системе линейных уравнений, используя для этой цели добавочные переменные, т.е. свести задачу к канонической.

Будем считать, что все m уравнений системы (1) линейно независимы. В противном случае из системы можно исключить часть уравнений так, чтобы уравнения системы стали линейно независимыми.

Совместная система m линейных уравнений с n переменными $(m < n)$ имеет бесконечное множество решений, в том числе и допустимых (не имеющих отрицательных компонент).

Допустимым базисным решением является решение, содержащее m неотрицательных основных (базисных) переменных и $(n-m)$ неосновных (небазисных, или свободных). Неосновные переменные в базисном решении равны нулю.

Основные переменные, как правило, отличны от нуля, т.е. являются положительными числами.

Если хотя бы одна из основных переменных принимает нулевое значение, то соответствующее базисное решение называется ***вырожденным***.

Любое неотрицательное базисное решение системы ограничений задачи линейного программирования, заданной в канонической форме, называется ***опорным решением*** или ***опорным планом***.

Опорный план называется ***невырожденным***, если он содержит m положительных компонент, в противном случае опорный план называется ***вырожденным***.

3 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Теорема 1. *Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.*

Доказательство. Необходимо показать, что выпуклая комбинация двух допустимых решений задачи линейного программирования также является ее допустимым решением.

Предположим, что задача имеет по крайней мере два допустимых решения:

$$X^{(1)} = \left(x_1^{(1)}; x_2^{(1)}; \cdots; x_n^{(1)}\right) \text{ и } X^{(2)} = \left(x_1^{(2)}; x_2^{(2)}; \cdots; x_n^{(2)}\right),$$

а условия заданы в матричной форме. Тогда $AX^{(1)} = B$, $AX^{(2)} = B$. Пусть $X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)}$ при $0 \le \alpha \le 1$ – произвольная выпуклая комбинация $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$. Покажем, что X также является решением системы ограничений:

$$AX = A\left[\alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)}\right] = \alpha AX^{(1)} + (1-\alpha) AX^{(2)} = \alpha B + B - \alpha B = B.$$

Так как компоненты $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ служат линейной комбинацией положительных компонент $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ с неотрицательными коэффициентами α и $(1-\alpha)$, то все эти компоненты неотрицательны, следовательно, $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ – допустимое решение задачи. Теорема доказана.

Множество решений задачи линейного программирования определяется конечной совокупностью линейных ограничений, поэтому такое множество геометрически представляет собой выпуклый многогранник или неограниченную многогранную область, за исключением тех случаев, когда система ограничений несовместна.

Теорема 2. *Если существует и притом единственное оптимальное решение задачи линейного программирования, то оно совпадает с одной из угловых точек множества допустимых решений.*

Доказательство. Пусть для некоторой задачи, в которой требуется найти максимум линейной формы Z, область допустимых решений есть выпуклый многогранник, имеющий s угловых точек $A_1, A_2, \ldots, A_s$, которым соответствует s векторов $X_1, X_2, \ldots, X_s$ (на рис. 1 приведен пример такого множества – пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ на плоскости).

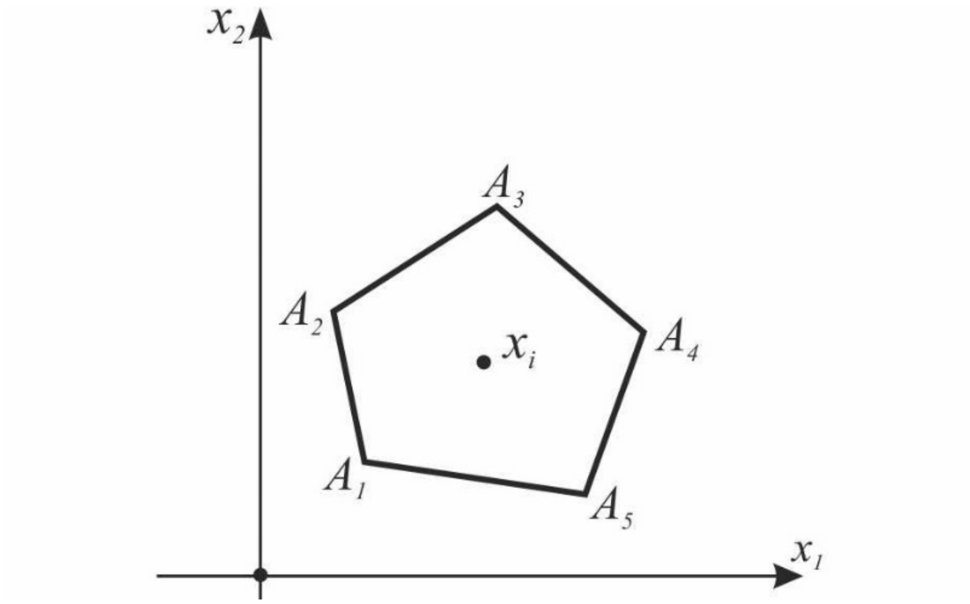

Рис. 1

Обозначим искомое оптимальное решение через X_0, тогда по условию $Z(X_0) = Z_{\max}$, т.е. $Z(X_0) \geq Z(X_i)$, где X_i – любая точка области решений.

Если X_0 совпадает с одной из угловых точек $A_1, A_2, \ldots, A_s$, то доказываемое утверждение выполнено.

Предположим, что X_0 не является угловой точкой. Тогда ее можно представить в виде выпуклой линейной комбинации угловых точек, т.е.

$$X_0 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_s A_s,$$

где $\alpha_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s = 1$.

Используя свойства линейных функций и рассматривая каждую точку A_j как соответствующий вектор X_j, функцию Z можно записать в виде

$$Z = Z(X_0) = Z(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_s X_s) =$$
$$= \alpha_1 Z(X_1) + \alpha_2 Z(X_2) + \ldots + \alpha_s Z(X_s).$$

Поскольку все $\alpha_j \geq 0$, сумма не уменьшится, если все $Z(X_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ заменить максимальным из них. Пусть, например,

$$\max_j Z\left(x_j\right) = Z\left(x_3\right).$$

Учитывая, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s = 1$, и заменяя все X_j на X_3, получим

$$Z(X_0) \leq \alpha_1 Z(X_3) + \alpha_2 Z(X_3) + \ldots + \alpha_s Z(X_3) =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s) Z(X_3) = Z(X_3).$$

Так как, по предположению, $Z(X_0) \geq Z(X_i)$ для всех X_i из области решений, в частности и для всех угловых точек, то получим два неравенства $Z(X_0) \geq Z(X_3)$ и $Z(X_0) \leq Z(X_3)$, из которых следует, что $Z(X_0) = Z(X_3)$. Таким образом, вектор X_3 (угловая точка A_3) является оптимальным решением.

С помощью очевидных изменений доказательство теоремы переносится и на тот случай, когда линейную форму нужно минимизировать.

Доказанная теорема позволяет сделать вывод, что поиски оптимального решения можно ограничить перебором конечного числа угловых точек.

Теорема 3. *Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования (опорному плану) соответствует угловая точка области допустимых решений системы ограничений.*

Доказательство. Пусть $X = (x_1; x_2; \ldots; x_m; 0; 0; \ldots; 0)$ – опорный план. Докажем, что вектор X соответствует угловой точке множества допустимых решений системы ограничений. При этом будем предполагать, что взятое базисное решение – невырожденное.

По определению базисного решения, векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$, соответствующие первым m компонентам, линейно независимы и образуют базис m-мерного пространства.

Предположим противное, т.е. допустим, что точка X не является угловой. Тогда ее можно представить как выпуклую комбинацию угловых точек, например, $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, т.е.

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)}, \text{ где } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Если $\alpha = 0$, то $X = X^{(2)}$; если же $\alpha = 1$, то $X = X^{(1)}$, тем самым теорема доказана. Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, т.е. $0 < \alpha < 1$. Так как первые m компонент вектора X положительны, а остальные $(n-m)$ равны нулю и $0 < \alpha < 1$, то угловые точки $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ принадлежат области допустимых решений, а все их компоненты, начиная с $(m+1)$-й, также равны нулю (это утверждение основано на определении суммы двух векторов и умножения вектора на число). Таким образом, можно записать

$$X^{(1)} = \left(x_1^{(1)}; x_2^{(1)}; \ldots; x_m^{(1)}; 0; 0; \ldots; 0\right), X^2 = \left(x_1^{(2)}; x_2^{(2)}; \ldots; x_m^{(2)}; 0; 0; \ldots; 0\right).$$

Так как $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ являются решениями системы ограничений, которая в векторной форме имеет вид

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = B,$$

то, подставляя компоненты этих решений в векторное уравнение, получим:

$$A_1 x_1^{(1)} + A_2 x_2^{(1)} + \ldots A_m x_m^{(1)} = B,$$

$$A_1 x_1^{(2)} + A_2 x_2^{(2)} + \ldots A_m x_m^{(2)} = B.$$

Остальные $(n-m)$ слагаемых в векторном уравнении отсутствуют из-за равенства нулю всех компонент, начиная с $(m+1)$-й. Вектор $X = (x_1; x_2; \ldots; x_m; 0; 0; \ldots; 0)$ по условию также является решением системы ограничений, поэтому $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_m x_m = B$. Вычтем из этого уравнения одно из ранее полученных, например первое:

$$A_1 \left(x_1 - x_1^{(1)} \right) + A_2 \left(x_2 - x_2^{(1)} \right) + \ldots + A_m \left(x_m - x_m^{(1)} \right) = 0.$$

Векторы $A_1, A_2, \ \ldots, A_m$ линейно независимы, поэтому их линейная комбинация равна нулю только в том случае, если все коэффициенты при них равны нулю, т.е.

$$x_1 - x_1^{(1)} = 0, x_2 - x_2^{(1)} = 0, \ldots, x_m - x_m^{(1)} = 0,$$

откуда

$$x_1 = x_1^{(1)}, x_2 = x_2^{(1)}, \ldots, x_m - x_m^{(1)}.$$

Следовательно, точка X совпадает с точкой $X^{(1)}$. То же самое можно доказать и для точки $X^{(2)}$ (если вместо первого уравнения вычесть второе).

Итак, X нельзя представить как выпуклую комбинацию двух угловых точек, следовательно, точка X сама является угловой.

Теорема 4 (обратная). *Каждой угловой точке множества допустимых решений системы ограничений соответствует опорный план.*

Доказательство. Пусть $X = (x_1; x_2; \ldots; x_m; \ldots; x_n)$ – угловая точка, не имеющая отрицательных компонент. Представим X как линейную комбинацию векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, входящих в систему ограничений, т.е. векторов

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

с положительными коэффициентами $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$X = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n.$$

Так как область решений есть многогранник m-мерного пространства, то в этой линейной комбинации только m коэффициентов при m линейно независимых векторах отличны от нуля, а остальные $(n-m)$ равны нулю. Для простоты предположим, что первые m компонент не равны нулю, тогда X можно представить в виде $X = A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_mx_m$, а $(x_1; x_2; \ldots; x_m; 0; 0; \ldots; 0)$ – компоненты исходной угловой точки.

Докажем линейную независимость векторов $A_1, A_2, \ \ldots, A_m$, соответствующих первым m переменным. Допустим, что эти векторы зависимы. Тогда можно найти такие постоянные $k_1, k_2, \ \ldots, k_m$, из которых не все равны нулю, чтобы выполнялось равенство

$$k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_mA_m = 0.$$

Умножив это равенство на $\pm\varepsilon$ и сложив с предыдущим, получим:

$$X = (x_1 + \varepsilon k_1)A_1 + (x_2 + \varepsilon k_2)A_2 + \ldots + (x_m + \varepsilon k_m)A_m;$$

$$X = (x_1 - \varepsilon k_1)A_1 + (x_2 - \varepsilon k_2)A_2 + \ldots + (x_m - \varepsilon k_m)A_m.$$

Возьмем ε таким, чтобы все множители при A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ оставались положительными. Тогда векторы

$$X^{(1)} = (x_1 + \varepsilon k_1; x_2 + \varepsilon k_2; \ldots; x_m + \varepsilon k_m; 0; 0; \ldots; 0)$$

и

$$X^{(2)} = (x_1 - \varepsilon k_1; x_2 - \varepsilon k_2; \ldots; x_m - \varepsilon k_m; 0; 0; \ldots; 0)$$

также являются допустимыми базисными решениями. Исходную угловую точку $X = (x_1; x_2; \ldots; x_m; 0; 0; \ldots; 0)$ можно представить как выпуклую комбинацию векторов $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$: $X = 0,5X^{(1)} + 0,5X^{(2)}$, что противоречит определению угловой точки. Это противоречие свидетельствует о том, что векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ линейно независимы. Таким образом, угловая точка X имеет компоненты $(x_1; x_2; \ldots; x_m; 0; 0; \ldots; 0)$, что соответствует допустимому базисному решению.

Следствие. *Если существует и притом единственное оптимальное решение задачи линейного программирования, то оно совпадает с одним из опорных решений системы ограничений.*

Справедливость этого утверждения вытекает из теорем 2 и 4.

Итак, оптимум линейной формы следует искать среди конечного числа опорных решений.

4 ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Графический метод решения задачи линейного программирования состоит из двух этапов:

1. Построение пространства допустимых решений, удовлетворяющих всем ограничениям модели.

2. Поиск оптимального решения среди всех точек пространства допустимых решений.

Применение графического метода удобнее рассмотреть на конкретных примерах в двух постановках: для максимума и минимума целевой функции.

Пример 1. Найти максимум функции $Z = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Изобразим область допустимых решений данной системы неравенств. Так, неравенство $-2x_1 + 3x_2 \le 12$ определяет ту часть полуплоскости, которой принадлежит начало координат, так как точка $(0;0)$ ему удовлетворяет. Построив решения остальных неравенств, получим выпуклый многоугольник $OABCD$, имеющий пять угловых точек: $O(0;0)$, $A(0;4)$, $B(3;6)$, $C(6;3)$, $D(1;0)$ (рис. 2).

Координаты точки B служат решением системы уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 12, \\ x_1 + x_2 = 9; \end{cases}$$

точки A – решением системы:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 12, \\ x_1 = 0; \end{cases}$$

точки C – решением системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9, \\ 3x_1 - 5x_2 = 3; \end{cases}$$

точки D – решением системы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 3, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

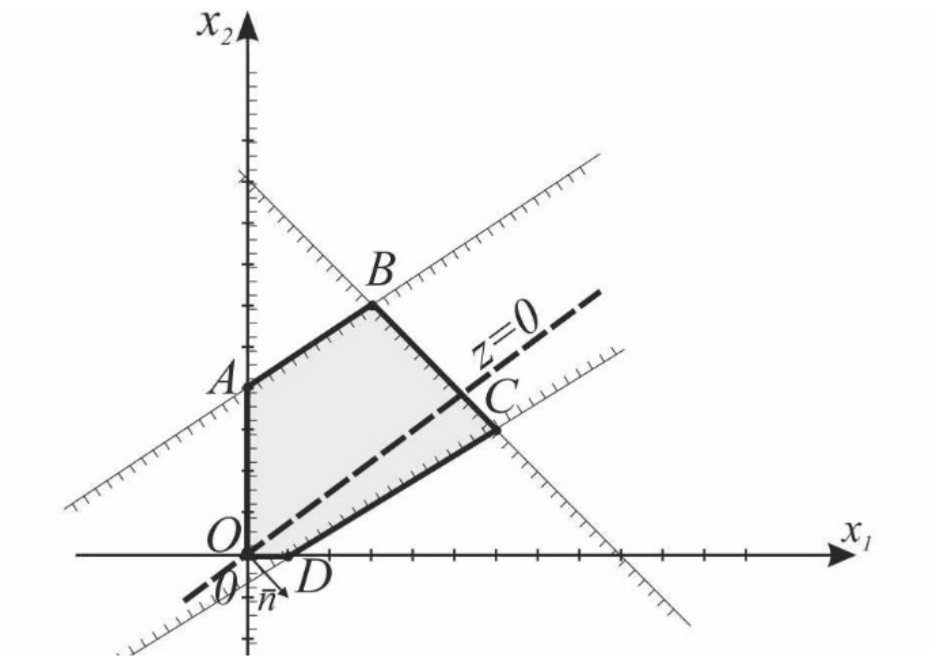

Рис. 2

Множество допустимых решений в рассматриваемом примере выпукло. Требуется найти такую точку этого многоугольника, которая бы максимизировала линейную форму $Z = x_1 - x_2$, являющуюся линейной функцией координат точек на плоскости. Форму Z приравняем какой-то постоянной величине, т.е. $Z = \text{const} = a$.

Это приводит к уравнению $x_1 - x_2 = a$, которое является уравнением прямой на плоскости. Следовательно, прямая $x_1 - x_2 = a$ является множеством точек, в которых функция Z принимает значение, равное a. Меняя величину a, получим семейство параллельных прямых. Каждую из прямых этого семейства принято называть ***линией уровня*** (***линией равных значений функции***).

На рис. 2 построена линия уровня $x_1 - x_2 = 0$, соответствующая значению $Z = 0$. При переходе от одной линии уровня к другой значение функции Z изменяется. Из аналитической геометрии известно, что коэффициенты при переменных в уравнении прямой служат координатами вектора $\overline{n}$, перпендикулярного прямой. В данном случае $\overline{n} = (1; -1)$. Из рис. 2 видно, что значения функции Z возрастают при перемещении исходной линии уровня в направлении вектора $\overline{n}$, и максимальное значение линейной формы на многоугольнике решений будет достигнуто в точке

$C(6;3)$, в которой линия уровня при дальнейшем передвижении выйдет из этого многоугольника. Подставив координаты точки C в выражение Z, найдем максимальное значение функции $Z_{\max} = Z(C) = 6 - 3 = 3$.

Если бы требовалось найти минимум функции Z, то исходную линию уровня следовало бы передвигать в сторону, противоположную $\overline{n}$.

До сих пор полученные выводы были основаны на том, что множество решений задач линейного программирования есть замкнутый многоугольник, система ограничений совместна и линейно независима (нет лишних ограничений) и оптимальное решение единственно.

Рассмотрим такие примеры, когда эти требования нарушаются.

Пример 2. Найти максимум функции $Z = x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

На рис. 3 изображены: неограниченная многогранная область решений данной системы ограничений-неравенств, линия уровня $x_1 + x_2 = 2$, вектор $\overline{n} = (1;1)$. Функция Z может неограниченно возрастать при заданной системе ограничений, поэтому $Z_{\max} = \infty$..

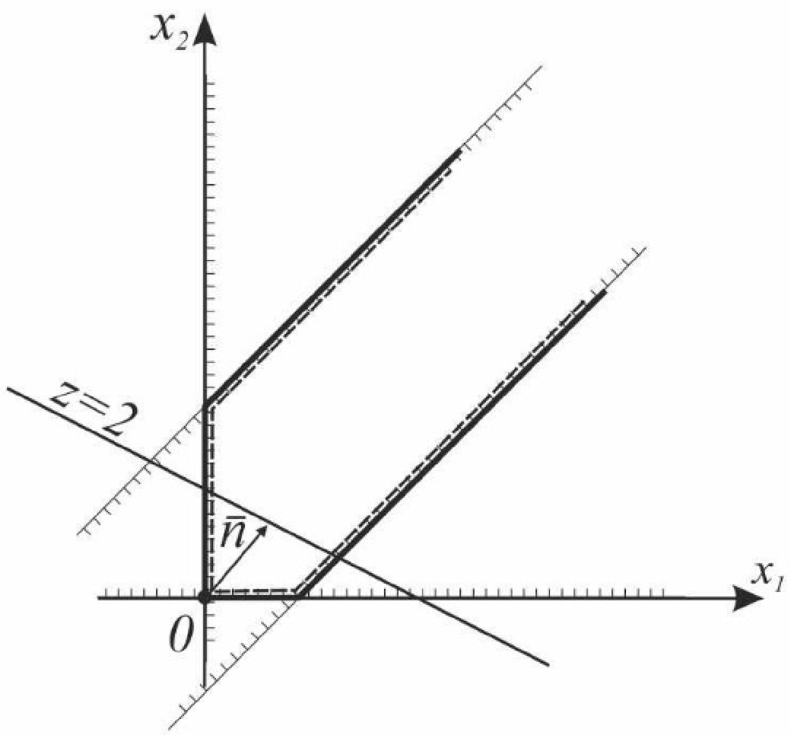

Рис. 3

Пример 3. Найти максимум функции $Z = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - 5x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Изображенная на рис. 4 область не содержит ни одной общей точки, которая удовлетворяла бы всем неравенствам системы ограничений, т.е. система ограничений противоречива и не может содержать ни одного решения, в том числе и оптимального.

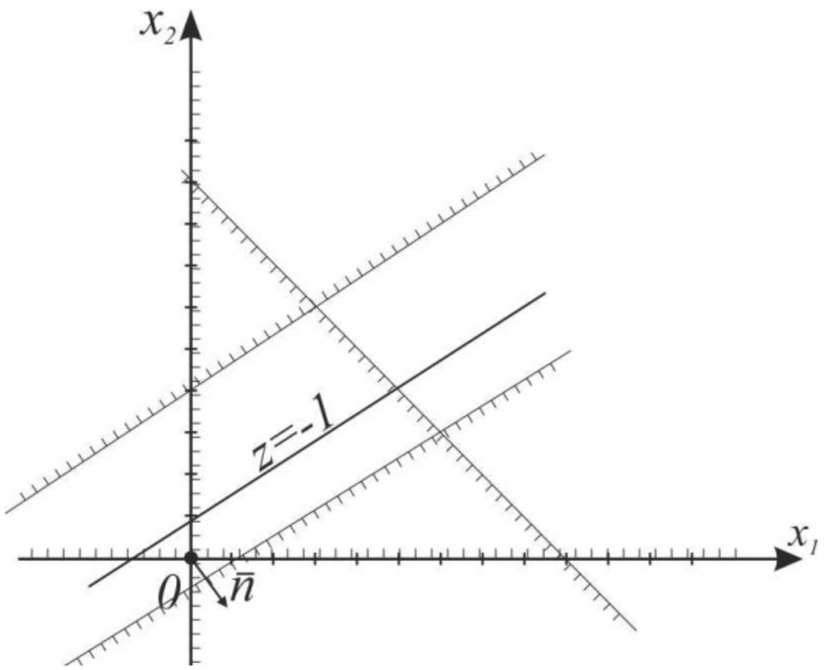

Рис. 4

Пример 4. Найти максимум функции $Z = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - 5x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Всем неравенствам системы ограничений удовлетворяют точки треугольника *ABC*, который и является областью решений (рис. 5). Максимальное значение $Z_{\max} = Z(C) = 9$. При построении треугольника *ABC* не использовали прямые $-2x_1 + 3x_2 = 12$ и $x_2 = 0$, хотя все точки этого треугольника удовлетворяют неравенствам $-2x_1 + 3x_2 \le 12$ и $x_2 \ge 0$. Таким образом, эти неравенства лишние в системе ограничений.

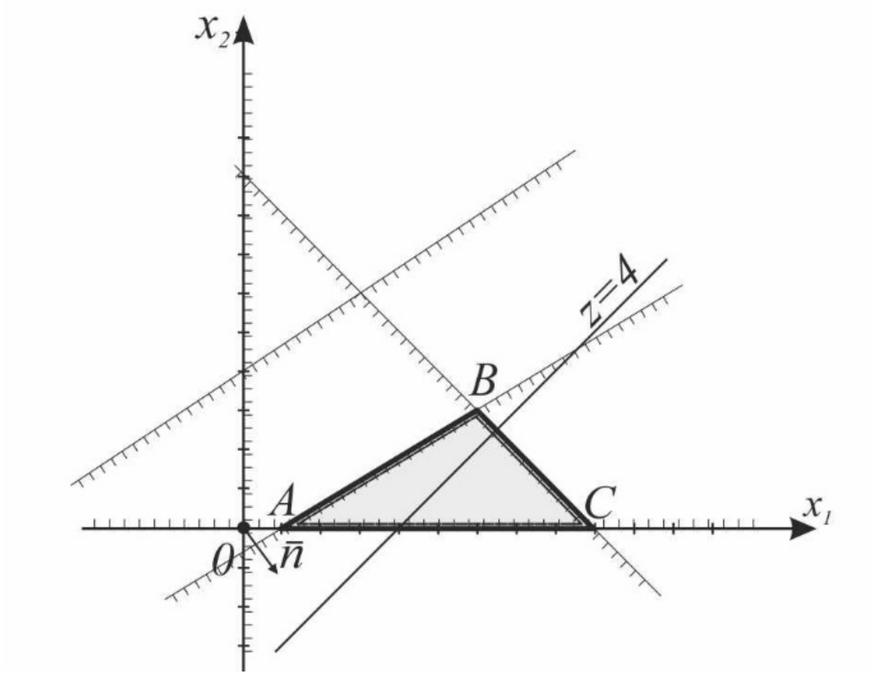

Рис. 5

Пример 5. Найти максимум функции $Z = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

На рис. 6 изображены область решений системы ограничений и линия уровня $Z = -1$. Если передвигать линию уровня параллельно исходной в направлении вектора $\bar{n} = (1;-1)$, то она выйдет из области решений не в одной точке, а сольется с прямой CD ($C(6;3), D(3;0)$), которая является граничной линией области решений. Все точки отрезка CD дают одно и то же значение функции Z, которое и служит ее оптимальным значением $Z_{\max} = 3$.

Этот пример показывает, что в некоторых случаях (весьма редких) единственность оптимального решения нарушается.

Пример 6. Найти минимум функции $Z = 2x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

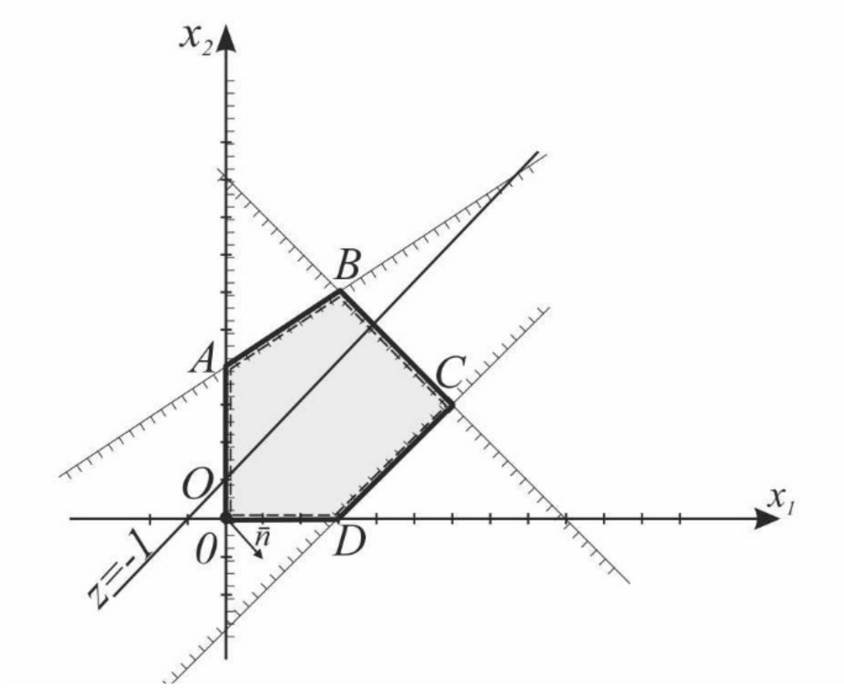

Рис. 6

Областью решений данной системы ограничений является треугольник ABC (рис. 7).

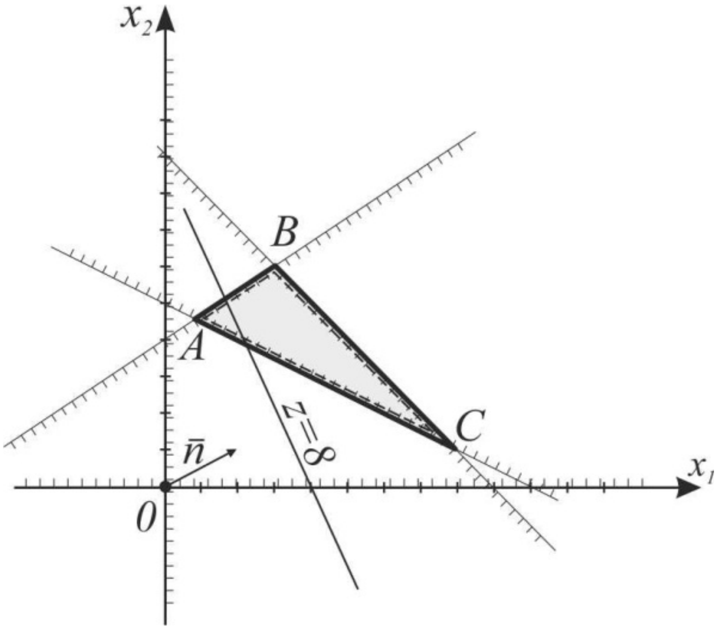

Рис. 7

На рис. 7 также изображены исходная линия уровня $Z = 8$ и вектор $\overline{n} = (2;1)$. Так как требуется найти минимум функции, то будем передвигать исходную линию уровня в сторону, противоположную $\overline{n}$. Минимум функции достигается в угловой точке A, координаты которой служат решением системы уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 12, \\ x_1 + 2x_2 = 10, \end{cases}$$

т.е. $A\left(\frac{6}{7};\frac{32}{7}\right)$ и $Z_{\min} = Z(A) = \frac{44}{7}$.

Опорной прямой называется линия уровня, которая имеет хотя бы одну общую точку с областью допустимых решений и по отношению к которой эта область находится в одной из полуплоскостей.

Область допустимых решений любой задачи имеет не более двух опорных прямых, на одной из которых может находиться оптимальное решение.

На основании приведенных примеров и определения опорной прямой запишем *этапы нахождения решения задачи линейного программирования с двумя переменными графическим методом*:

1. Изображаем область допустимых решений.

2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

3. Если область допустимых решений является непустым множеством, то изображаем нормальный вектор $\overline{n} = (c_1; c_2)$ линий уровня и одну из линий уровня, имеющую общие точки с этой областью.

4. Линию уровня перемещаем до опорной прямой в задаче на максимум в направлении нормали, в задаче на минимум – в противоположном направлении.

5. Если при перемещении линии уровня по области допустимых решений в направлении, соответствующем приближению к максимуму (минимуму) целевой функции, линия уровня уходит в бесконечность, то $Z_{\max} = \infty$ $(Z_{\min} = -\infty)$.

6. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то для его нахождения решаем систему из уравнений прямых, ограничивающих область допустимых решений и имеющих общие точки с соответствующей опорой прямой. Если целевая функция достигает экстремума в двух угловых точках, то задача имеет бесконечное множество решений. Оптимальным решением является любая выпуклая линейная комбинация этих точек.

7. Вычисляем значение целевой функции на оптимальном решении.

Графическим методом решаются задачи линейного программирования, записанные в каноническом виде и удовлетворяющие условию $n - r \le 2$, где n – число неизвестных системы ограничений; r – ранг системы векторов условий. Если уравнения системы ограничений линейно независимы, то ранг r равен числу уравнений системы m.

Пример 7. Найти минимум функции $Z = -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 7x_5$ при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 8x_5 = 3, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 \quad -4x_5 = -4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5.$$

Метод применим, так как $n - r = 5 - 3 = 2$.

Методом Жордана – Гаусса приведем систему уравнений-ограничений задачи к равносильной разрешенной (табл. 1). Одновременно исключим разрешенные неизвестные из целевой функции.

Таблица 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Система уравнений-ограничений	–1	1	1	2	–3	4
	1	1	4	1	–8	3
	0	1	1	0	–4	–4
Целевая функция	–1	–1	1	3	7	0
	–1	1	1	2	–3	4
	2	0	3	–1	–5	–1
	1	0	0	–2	–1	–8
	–2	0	2	5	4	4
	0	1	1	0	–4	–4
	0	0	3	3	–3	15
	1	0	0	–2	–1	–8
	0	0	2	1	2	–12
	0	1	0	–1	–3	–9
	0	0	1	1	–1	5
	1	0	0	–2	–1	–8
	0	0	0	–1	4	–22

Используя последнюю часть табл. 1, запишем задачу линейного программирования в преобразованном виде:

$$Z = -x_4 + 4x_5 + 22 \to \min,$$

$$\begin{cases} \quad x_2 \qquad - x_4 - 3x_5 = -9, \\ \qquad\quad x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 \qquad\quad -2x_4 - x_5 = -8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5.$$

Отбросим в уравнениях-ограничениях неотрицательные разрешенные неизвестные x_1, x_2, x_3 и заменим знак равенства знаками неравенства «$\leq$», получим вспомогательную задачу линейного программирования с двумя переменными

$$Z = -x_4 + 4x_5 + 22 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_4 - 3x_5 \le -9, \\ x_4 - x_5 \le 5, \\ -2x_4 - x_5 \le -8, \end{cases}$$

$$x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

На рис. 8 изображены область решений системы ограничений и вектор $\bar{n} = (-1;4)$. Минимум функции достигается в угловой точке *C*, координаты которой являются решением системы

$$\begin{cases} -x_4 - 3x_5 = 9, \\ x_4 - x_5 = 5. \end{cases}$$

Получаем $C(6;1)$. Вычисляем минимальное значение целевой функции $Z_{\min} = Z(C) = -6 + 4 \cdot 1 + 22 = 20$.

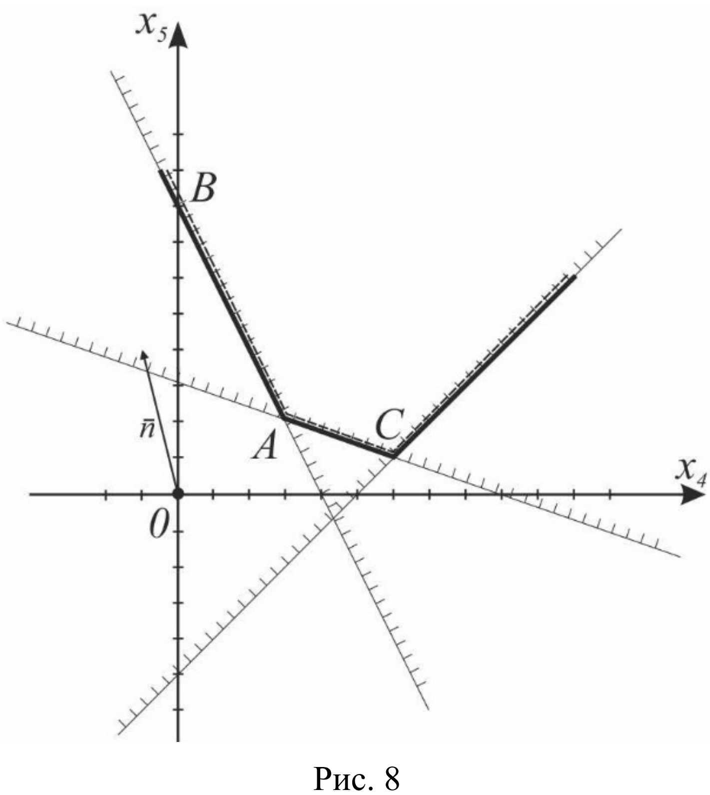

Рис. 8

Чтобы найти оптимальное решение исходной задачи, воспользуемся системой ограничений в разрешенном виде:

$$\begin{cases} x_2 - x_4 - 3x_5 = -9, \\ x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_4 - x_5 = -8, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_2 = -9 + x_4 + 3x_5, \\ x_3 = 5 - x_4 + x_5, \\ x_1 = -8 + 2x_4 + x_5. \end{cases}$$

При $x_4 = 6,\ x_5 = 1$ получим $x_2 = 0, x_3 = 0, x_1 = 5,$ т.е. $X = (5;0;0;6;1)$.

Как видно из представленных примеров, оптимальное решение расположено в угловой точке области допустимых решений, где пересекаются две прямые. Если мы изменим наклон функции Z (за счет изменения ее коэффициентов), то увидим, что в любом случае решение достигается в одной из угловых точек (или одновременно в нескольких угловых точках). В этом и заключается основная идея построения общего алгоритма – симплекс-метода.

5 СИМПЛЕКС-МЕТОД

Симплекс-метод является универсальным методом, которым можно решить любую задачу линейного программирования.

Его идея состоит в следующем. Используя систему ограничений, приведенную к общему виду, т.е. к системе m уравнений с n переменными $(m < n)$, находят ее любое базисное решение, по возможности наиболее простое. Если первое же найденное базисное решение оказалось допустимым, то проверяют его на оптимальность. Если оно не оптимально, то переходят к другому допустимому базисному решению. Симплексный метод гарантирует, что при этом новом решении линейная форма, если не достигнет оптимума, то приблизится к нему (в случае перехода к вырожденному базисному решению значение линейной формы не изменится). С новым допустимым базисным решением поступают так же, пока не находят решение, которое является оптимальным.

Если первое найденное базисное решение окажется недопустимым, то с помощью симплексного метода осуществляют переход к другим базисным решениям, которые позволяют приблизиться к области допустимых решений, пока на каком-то шаге не получится допустимое базисное решение. К нему применяют тот же механизм.

Таким образом, применение симплексного метода распадается на два этапа:

1) нахождение опорного решения системы ограничений;

2) нахождение оптимального решения.

При этом каждый этап включает несколько шагов, соответствующих тому или иному базисному решению. Так как число базисных решений всегда ограничено, то ограничено и число шагов симплекс-метода.

Пример 8. Найти максимум функции $Z = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \le 40, \\ x_2 \le 30, \\ x_1 + x_2 \le 60, \\ x_1 + 2x_2 \le 80, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Для сведения системы ограничений-неравенств к системе уравнений прибавим к левой части каждого неравенства добавочные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5, x_6:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 40, \\ x_2 + x_4 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 60, \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 80, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

Система ограничений есть система четырех независимых уравнений с шестью переменными, поэтому число основных переменных должно равняться четырем, а число неосновных – двум.

Для решения задачи симплексным методом прежде всего нужно найти любое базисное решение. В данном случае для этого достаточно взять в качестве основных добавочные переменные x_3, x_4, x_5, x_6, так как коэффициенты при этих переменных образуют единичную матрицу. Считая неосновные переменные x_1 и x_2 равными нулю, получим базисное решение $(0;0;40;30;60;80)$, которое к тому же оказалось опорным. Переходим сразу ко второму этапу – поиску оптимального решения.

I шаг. Основные переменные: x_3, x_4, x_5, x_6; неосновные переменные: x_1, x_2. В системе (4) основные переменные выразим через неосновные. Через них выразим и линейную форму (в данном случае она уже выражена через x_1 и x_2).

Получим

$$\begin{cases} x_3 = 40 - x_1, \\ \underline{x_4 = 30 - x_2}, \\ x_5 = 60 - x_1 - x_2, \\ x_6 = 80 - x_1 - 2x_2, \end{cases} \tag{5}$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2.$$

При $x_1 = x_2 = 0$ имеем $x_3 = 40, x_4 = 30, x_5 = 60, x_6 = 80$, что дает базисное решение $(0;\ 0;\ 40;\ 30;\ 60;\ 80)$, которое мы приняли за исходное. При этом базисном решении значение линейной формы равно $Z = 2x_1 + 3x_2 = 0$.

Теперь от этого первоначального решения нужно перейти к другому, при котором значение линейной формы увеличится. Ее значение возрастает при увеличении значений переменных x_1 и x_2, поэтому эти переменные невыгодно считать неосновными, т.е. равными нулю, их нужно перевести в число основных. Это и означает переход к новому базисному решению. При симплексном методе на каждом шаге решения предполагается перевод в число основных только одной из свободных переменных.

Переведем в число основных переменную x_2, так как она входит в выражение линейной формы с наибольшим коэффициентом.

Как только одна из свободных переменных переходит в число основных, одна из основных должна быть переведена на ее место в число неосновных. Значение x_2 необходимо сделать как можно большим, так как это соответствует конечной цели – максимизации *Z*. Однако увеличение x_2 может продолжаться только до тех пор, пока не нарушится требование неотрицательности переменных. Из второго уравнения системы (5) следует, что $x_2 \le 30$ (если $x_2 > 30$, то $x_4 < 0$), из третьего: $x_2 \le 60$, из четвертого: $x_2 \le \frac{80}{2}$, т.е. $x_2 \le 40$ (в первое уравнение x_2 не входит). Всем этим условиям удовлетворяет $x_2 \le 30$, т.е. нужно принять

$$x_2 = \min\left\{\frac{30}{1}; \frac{60}{1}; \frac{80}{2}\right\} = 30.$$

Тогда $x_4 = 0$ и x_4 переходит в число неосновных переменных, а x_3 и x_5 останутся положительными.

II шаг. Основные переменные: x_2, x_3, x_5, x_6, неосновные переменные: x_1, x_4. Выразим основные переменные и линейную форму через неосновные. В системе (2) берем то уравнение, из которого получено минимальное значение отношения свободного числа к коэффициенту при x_2 (уравнение подчеркнуто). Выразим из этого уравнения x_2: $x_2 = 30 - x_4$. Подставим это выражение x_2 во все остальные уравнения системы (5) и в линейную форму *Z*, получим

$$\begin{cases} x_2 = 30 - x_4, \\ x_3 = 40 - x_1, \\ x_5 = 30 - x_1 + x_4, \\ \underline{x_6 = 20 - x_1 + 2x_4}, \end{cases} \tag{6}$$

$$Z = 90 + 2x_1 - 3x_4.$$

При $x_1 = x_4 = 0$ имеем $Z = 90$. Это уже лучше, чем на I шаге, но не искомый максимум. Дальнейшее увеличение функции *Z* возможно за счет введения переменной x_1 в число основных (ее увеличение приводит к увеличению линейной формы). Примем $x_1 = \min\left\{\frac{40}{1}; \frac{30}{1}; \frac{20}{1}\right\} = 20$, тогда $x_6 = 0$ и x_6 переходит в число неосновных переменных. Первое уравнение не используется при нахождении указанного минимума, так как x_1 не входит в это уравнение.

III шаг. Основные переменные: x_1, x_2, x_3, x_5; неосновные переменные: x_4, x_6. Выразим основные переменные и линейную форму через неосновные. Из последнего уравнения системы (оно подчеркнуто) имеем $x_1 = 20 + 2x_4 - x_6$. Подставляя это выражение в остальные уравнения и в линейную форму, получим

$$\begin{cases} x_1 = 20 + 2x_4 - x_6, \\ x_2 = 30 - x_4, \\ x_3 = 20 - 2x_4 + x_6, \\ \underline{x_5 = 10 - x_4 + x_6,} \end{cases} \tag{7}$$

$$Z = 130 + x_4 - 2x_6.$$

Из выражения линейной формы следует, что ее максимальное значение еще не получено, так как возможно увеличение Z за счет введения в основные переменной x_4, $x_4 = \min\left\{\frac{30}{1}; \frac{20}{2}; \frac{10}{1}\right\} = 10$.

Переменная x_4 входит в выражение для x_1 (первое уравнение системы (7)), но имеет положительный коэффициент и при любом возрастании x_4 переменная x_1 не может стать отрицательной, поэтому при выборе из минимальных значений первое уравнение не рассматриваем.

Также мы получили два одинаковых минимальных значения, равные 10. Если $x_4 = 10$, то $x_3 = 0$ и $x_5 = 0$. В этом случае одну из переменных (x_3 или x_5) оставляют в числе основных, но при этом ее значение считают равным нулю, т.е. полученное на следующем шаге базисное решение оказывается вырожденным. Оставим, например, x_3 в числе основных переменных, а x_5 переведем в число неосновных.

IV шаг. Основные переменные: x_1, x_2, x_3, x_4; неосновные переменные: x_5, x_6. Выразим основные переменные и линейную форму Z через неосновные. В итоге получим

$$\begin{cases} x_1 = 40 - 2x_5 + x_6, \\ x_2 = 20 + x_5 - x_6, \\ x_3 = 2x_5 - x_6, \\ x_4 = 10 - x_5 + x_6, \end{cases}$$

$$Z = 140 - x_5 - x_6.$$

Так как в выражение линейной формы переменные x_5 и x_6 входят с отрицательными коэффициентами, то увеличение Z за счет этих переменных невозможно.

Отсутствие на каком-то шаге симплексного метода в выражении линейной формы Z, максимум которой ищется, неосновных переменных с положительными коэффициентами является критерием оптимальности.

Следовательно, на IV шаге критерий оптимальности достигнут и задача решена. Оптимальным служит решение $(40;20;0;10;0;0)$ при котором $Z_{\max}=140$.

В рассмотренном примере первое же полученное базисное решение оказалось допустимым. В других случаях его можно найти не сразу, а через некоторое число шагов.

5.1. Нахождение опорного решения

На первом этапе симплексного метода, т.е. при нахождении какого-либо допустимого решения, линейная форма в расчет не берется, а все преобразования относятся только к системе ограничений.

Пусть задана каноническая задача линейного программирования. Выбираем группу m основных переменных, которые позволяют найти исходное базисное решение (можем считать, что основными являются первые m переменных). Выразим эти основные переменные через неосновные:

$$\begin{cases} x_1 = k_1 + b_{1\,m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{1n}x_n, \\ x_2 = k_2 + b_{2\,m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = k_i + b_{i\,m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{in}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = k_m + b_{m\,m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{mn}x_n. \end{cases} \tag{8}$$

Этому способу разбиения переменных соответствует базисное решение $(k_1;k_2;\ldots;k_i;\ldots;k_m;0;0;\ldots;0)$. Рассмотрим случай, когда это решение является недопустимым. От полученного базисного решения следует сначала перейти к какому-нибудь опорному решению, причем не обязательно, чтобы этот переход осуществлялся сразу, в один шаг.

Если система ограничений не противоречива, то через конечное число шагов будет осуществлен переход к опорному решению.

Так как исходное базисное решение недопустимо (по предположению), среди свободных членов системы ограничений (8) имеется хотя бы один отрицательный (число отрицательных свободных членов этой системы совпадает с числом отрицательных компонент исходного базисного решения). Пусть им является свободный член k_i i-го уравнения, т.е. основная переменная x_i в соответствующем базисном решении отрицательна.

Это уравнение показывает, что переменная x_i возрастает при возрастании тех неосновных переменных, коэффициенты которых в этом уравнении положительны. Следовательно, в основные можно переводить те неосновные переменные, которые в уравнении системы (8) с отрицательным свободным членом имеют положительные коэффициенты.

Возможны три случая:

1. В i-м уравнении системы (8) нет неосновных переменных с положительными коэффициентами, т.е. все коэффициенты b_{ij} отрицательны (как и свободный член k_i). В этом случае данная система ограничений несовместна – она не имеет ни одного допустимого решения. Действительно, вследствие неотрицательности всех переменных, в том числе $x_{m+1},\ldots,x_n$, из i-го уравнения, в котором свободный член k_i и все коэффициенты $b_{i\,m+1},\ldots,b_{in}$ отрицательны, следует, что переменная x_i не может принимать неотрицательных значений. Значит, нет и оптимального решения.

2. В i-м уравнении имеется одна переменная x_{m+j}, коэффициент при которой положителен. В этом случае именно эта переменная переходит в основные.

3. В i-м уравнении имеется несколько переменных с положительными коэффициентами. В этом случае в основные можно перевести любую из них.

Для того чтобы установить, какая основная переменная должна быть переведена в число неосновных, находят отношения свободных членов к коэффициентам при переменной, переводимой в основные, из всех уравнений, где знаки свободных членов и указанных коэффициентов противоположны, а затем рассматривают абсолютную величину этих отношений и из них выбирают наименьшую (если в некоторых уравнениях знаки свободных членов и коэффициентов совпадают или в каких-то уравнениях переменная, переводимая в основные, отсутствует, то отношение не рассматривают).

Уравнение, из которого получено наименьшее отношение, выделяют. Выделенное уравнение показывает, какая из основных переменных должна быть переведена в неосновные. Выразив новые основные переменные через неосновные, переходят к следующему базисному решению, которое ближе к опорному. Если оно окажется недопустимым, то к нему следует применить ту же схему еще раз. В результате через конечное число шагов получится опорное решение.

Пример 9. Найти опорное решение при заданных ограничениях

$$\begin{cases} -x_1+2x_2\ge 2, \\ x_1+x_2\ge 4, \\ x_1-x_2\le 2, \\ x_2\le 6, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

Вводим добавочные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5, x_6 и сводим данную систему неравенств к эквивалентной ей системе уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2, \\ x_2 + x_6 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

Введенные добавочные переменные принимаем за основные, так как в этом случае базисное решение системы легко находится. Тогда x_1 и x_2 – неосновные переменные. Описанные выше действия по нахождению опорного плана удобно выполнять методом Жордана – Гаусса (табл. 2) (так как исключение одной переменной из основных и включение в нее другой описанным способом соответствует этому методу).

Таблица 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Δ_1	Δ_2	
–1	2	–1	0	0	0	2			
1	1	0	–1	0	0	4			
1	–1	0	0	1	0	2			
0	1	0	0	0	1	6			
1	–2	1	0	0	0	–2	–	(1)	Базисное решение (0;0;–2;–4;2;6)
–1	–1	0	1	0	0	–4	4	4	
1	–1	0	0	1	0	2	(2)	–	
0	1	0	0	0	1	6	–	6	
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	1	–		Базисное решение (0;1;0;–3;3;5)
$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	–3	(2)		
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	3	6		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	5	10		
0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	2			Базисное решение (2;2;0;0;2;4)
1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	2			
0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	2			
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	4			

Данному разбиению переменных соответствует базисное решение $(0;0;-2;-4;2;6)$ (вторая итерация в табл. 2), которое является недопустимым (две переменные отрицательны), а поэтому оно неоптимальное. От этого базисного решения перейдем к улучшенному.

Чтобы решить, какую переменную следует перевести из неосновных в основные, рассмотрим любое из двух имеющихся уравнений последней системы с отрицательными свободными членами, например второе. Оно показывает, что в основные переменные можно перевести x_1 и x_2, так как в этом уравнении они имеют отрицательные коэффициенты (при их увеличении переменная x_4 увеличится $x_4 = -4 + x_1 + x_2$).

Найдем абсолютную величину наименьшего отношения свободных членов системы к коэффициентам при $\tilde{o}_1$; имеем $x_1 = \min\left\{\frac{4}{1};\frac{2}{1}\right\} = 2$ (в табл. 2 обозначено Δ_1) (мы писали, что если при нахождении данного отношения знаки свободных членов и коэффициентов совпадают, то оно не рассматривается. В методе Жордана – Гаусса переменные перенесены в одну сторону, поэтому не рассматриваются соответствующие отношения с разными знаками). Оно получено из третьего уравнения, показывающего, что в неосновные нужно перевести переменную $\tilde{o}_5$, которая в исходном базисном решении положительна. Следовательно, полученное базисное решение, как и исходное, содержит две отрицательные компоненты, т.е. при переходе к такому базисному решению улучшения не произойдет.

Если же перевести в основные переменную x_2, то $x_2 = \min\left\{\frac{2}{2};\frac{4}{1};\frac{6}{1}\right\} = 1$ (в табл. 2 обозначено Δ_2). Оно получено из первого уравнения, в котором свободный член отрицателен. Следовательно, переводя x_2 в основные, а x_3 в неосновные переменные, получим базисное решение, в котором число отрицательных компонент на единицу меньше, чем в исходном, поэтому основные переменные: x_2, x_4, x_5, x_6; неосновные переменные: x_1, x_3. Имеем новое базисное решение $(0;1;0;-3;3;5)$, которое также является недопустимым, а поэтому неоптимальным. Уравнение с отрицательным свободным членом – второе. Оно показывает, что в основные переменные можно перевести x_1 и x_3. Переведем x_1:

$$x_1 = \min\left\{\frac{3}{\frac{3}{2}};\frac{3}{\frac{1}{2}};\frac{5}{\frac{1}{2}}\right\} = 2.$$

Значит, в неосновные переменные нужно перевести x_4.

Новое базисное решение имеет вид $(2;2;0;0;2;4)$. Оно является опорным.

Решение задачи симплекс-методом, рассмотренное подробно, удобнее проводить, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения первого опорного плана, записать в симплексную таблицу.

Рассмотрим на примере этой же задачи: найти максимум функции $Z = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 40, \\ x_2 + x_4 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 60, \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 80. \end{cases}$$

Напомним, что система ограничений может быть записана в векторной форме:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Предположим, что система ограничений содержит m единичных векторов. Без ограничения общности можно положить, что единичными являются первые m векторов. В первом столбце записываются базисные векторы, в столбце «C базиса» – коэффициенты целевой функции, соответствующие векторам базиса. В столбце A_0 – первоначальный опорный план X_0, в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план, в столбцах A_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ – коэффициенты разложения j-го вектора по базису ($x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + \ldots + x_{mj}A_m = A_j$). Обозначим их X_j. В последней строке в столбце A_0 – значение целевой функции $Z(X_0)$, которое она принимает при найденном опорном плане, а в столбцах A_j – значения оценок $Z_j - C_j$.

Функции $Z(X_0)$ и $Z_j = Z(X_j)$ находим, подставляя в линейную функцию соответственно компоненты опорного плана и коэффициенты разложения j-го вектора по векторам базиса, поэтому эти значения можно получить как скалярное произведение:

$$Z(X_0) = C_б \cdot X_0 = \sum_{i=1}^{m} C_i x_i, \; Z_j = C_б \cdot X_j = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ij}, \;\; j = 1, 2, \ldots, n,$$

где C_i – коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса.

В данной задаче

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Единичные векторы A_3, A_4, A_5, A_6 образуют базис (табл. 3); $Z = 2x_1 + 3x_2$, или $Z - 2x_1 - 3x_2 = 0$.

Таблица 3

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 2$	$C_2 = 3$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_3	0	40	1	0	1	0	0	0	–
A_4	0	30	0	1	0	1	0	0	(30)
A_5	0	60	1	1	0	0	1	0	60
A_6	0	80	1	2	0	0	0	1	40
$Z_j - C_j$		0	–2	(–3)	0	0	0	0	
A_3	0	40	1	0	1	0	0	0	40
A_2	3	30	0	1	0	1	0	0	–
A_5	0	30	1	0	0	–1	1	0	30
A_6	0	20	1	0	0	–2	0	1	(20)
$Z_j - C_j$		90	(–2)	0	0	3	0	0	
A_3	0	20	0	0	1	2	0	–1	10
A_2	3	30	0	1	0	1	0	0	30
A_5	0	10	0	0	0	1	1	–1	10
A_1	2	20	1	0	0	–2	0	1	–
$Z_j - C_j$		130	0	0	0	(–1)	0	2	
A_3	0	0	0	0	1	0	–2	1	
A_2	3	20	0	1	0	0	–1	1	
A_5	0	10	0	0	0	1	1	–1	
A_1	2	40	1	0	0	0	2	–1	
$Z_j - C_j$		140	0	0	0	0	1	1	

$Z_{max} = 140$

Критерием оптимальности в задаче на максимум будет выполнение условия $Z_j - C_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Переменная x_2 входит в выражение линейной формы с наибольшим коэффициентом, поэтому выбирается наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка в последней строке. Этим определяется тот вектор, который должен перейти в базис. В примере это вектор A_2, поэтому находим $\Delta_2 = \min\limits_i \left\{ \dfrac{b_i}{a_{i2}} \right\}$ для всех i, для которых $a_{i2} > 0$ (последний столбец таблицы). В нашем случае это $30 = \dfrac{b_2}{a_{22}}$. Это означает, что вектор A_4, находящийся во второй строке, переходит в число небазисных.

Столбец, показывающий, какой вектор должен перейти в базис, называется ***направляющим (ведущим) столбцом***. Строка, показывающая, какой вектор должен перейти в небазисные, называется ***направляющей строкой***. Элемент, стоящий на пересечении направляющей строки и направляющего столбца, называется ***разрешающим***.

Сделаем вектор A_2 базисным единичным так, чтобы единица стояла на месте разрешающего элемента. Это можно сделать методом Жордана – Гаусса. Получим вторую часть симплекс-таблицы, в последней строке которой один отрицательный элемент, показывающий, что вектор A_1 должен перейти в базисные,

$$\Delta_1 = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{i1}} \right\} = \min\{40; 30; 20\} = 20,$$

т.е. вектор A_6 должен быть переведен в небазисные. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнут критерий оптимальности. В нашем случае он заканчивается на четвертой части симплекс-таблицы.

Пример 10. Найти минимальное значение функции $Z = x_1 - x_2 - 3x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Сведем задачу к канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Единичные векторы A_4, A_5, A_6 выберем в качестве базиса. Получим опорный план $(0;0;0;1;2;5)$. Составим симплекс-таблицу (табл. 4). *Критерием оптимальности задачи на минимум является выполнение условия* $Z_j - C_j \le 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$ (так как минимизация целевой функции Z равносильна максимизации целевой функции $-Z$, $Z(X) \to \max \Leftrightarrow \Leftrightarrow -Z(X) \to \min$). В остальном симплексный процесс аналогичен процессу отыскания максимального значения целевой функции.

Таблица 4

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 1$	$C_2 = -1$	$C_3 = -3$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_4	0	1	2	–1	1	1	0	0	(1)
A_5	0	2	–4	2	–1	0	1	0	–
A_6	0	5	3	0	1	0	0	1	5
$Z_j - C_j$		0	–1	1	(3)	0	0	0	
A_3	–3	1	2	–1	1	1	0	0	–
A_5	0	3	–2	1	0	1	1	0	(3)
A_6	0	4	1	1	0	–1	0	1	4
$Z_j - C_j$		–3	–7	(4)	0	–3	0	0	
A_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	–
A_2	–1	3	–2	1	0	1	1	0	–
A_6	0	1	3	0	0	–2	–1	1	1/3
$Z_j - C_j$		–15	(1)	0	0	–7	–4	0	
A_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	
A_2	–1	11/3	0	1	0	–1/3	1/3	2/3	
A_1	1	1/3	1	0	0	–2/3	–1/3	1/3	
$Z_j - C_j$		$-\frac{46}{3}$	0	0	0	$-\frac{19}{3}$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	

$Z_{\min} = -\frac{46}{3}$. Оптимальный план $\left(\frac{1}{3}; \frac{11}{3}; 4\right)$.

Пример 11. Найти максимум функции $Z = x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Каноническая задача имеет вид

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Составим симплекс-таблицу (табл. 5).

Таблица 5

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 1$	$C_2 = 1$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	
A_3	0	12	–2	3	1	0	(4)
A_4	0	3	3	–5	0	1	–
$Z_j - C_j$		0	–1	(–1)	0	0	
A_2	1	4	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	
A_4	0	23	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	
$Z_j - C_j$		4	$\left(-\frac{5}{3}\right)$	0	$\frac{1}{3}$	0	

Из оценки $Z_j - C_j$ следует, что вектор A_1 следует перевести в базисные, но так как все числа в этом столбце отрицательные, заключаем, что переменная x_1 может возрастать неограниченно. Значит, и функция Z, максимум который требуется найти, также может неограниченно возрастать. Поэтому $Z_{\max} = \infty$ (в примере 2 разд. 4 дано графическое решение этого примера).

Пример 12. Найти максимум функции $Z = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 3x_1 - 5x_2 \geq 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Сведем задачу к канонической:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Соответствующее базисное решение $(0;0;-12;9;-3)$ недопустимо. Воспользуемся симплекс-методом для нахождения опорного решения (табл. 6).

Таблица 6

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Δ_1
–2	3	–1	0	0	0	12	
1	1	0	1	0	0	9	
3	–5	0	0	–1	0	3	
2	–3	1	0	0	0	–12	–
1	1	0	1	0	0	9	9
–3	5	0	0	1	0	–3	(1)
0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	0	–14	
0	$\frac{8}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	8	
1	$-\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	

Вектор A_1 перевели в базисный, в первой строке все коэффициенты, кроме свободного члена, положительны. Это является признаком того, что система несовместна ($x_3 = -14 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_5$; в примере 3 разд. 4 дано графическое решение).

Пример 13. Найти максимум функции $Z = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 - x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Каноническая задача примет вид

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Составим симплекс-таблицу (табл. 7).

В предыдущих примерах нулевыми являлись только оценки, соответствующие базисным векторам, и тогда оптимальное решение было единственным. В этом случае нулевая оценка соответствует также небазисному вектору A_2. Попробуем перевести A_2 в базис (табл. 7).

Таблица 7

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 1$	$C_2 = -1$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_3	0	12	–2	3	1	0	0	–
A_4	0	9	1	1	0	1	0	9
A_5	0	3	1	–1	0	0	1	(3)
$Z_j - C_j$		0	(–1)	1	0	0	0	
A_3	0	18	0	1	1	0	2	18
A_4	0	6	0	2	0	1	–1	(3)
A_1	1	3	1	–1	0	0	1	–
$Z_j - C_j$		3	0	0	0	0	1	
A_4 исключаем из базиса, A_2 переводим в базис								
A_3	0	15	0	0	1	–1/2	5/2	
A_2	–1	3	0	1	0	1/2	–1/2	
A_1	0	6	1	0	0	1/2	1/2	
$Z_j - C_j$		3	0	0	0	0	1	

На втором шаге оптимальное решение имело компоненты $(3;0;18;6;0)$, на третьем – $(6;3;15;0;0)$. Однако оба оптимальных решения дают одно и то же максимальное значение $Z_{\max} = 3$. Следовательно, единственность оптимального решения может нарушаться. Это происходит в том случае, когда нулевая оценка соответствует не только базисному вектору (графическое решение дано в примере 5 разд. 4).

5.2. Алгоритм симплексного метода

1. В системе ограничений (уравнений или неравенств) переносят свободные члены в правые части. Если среди этих свободных членов окажутся отрицательные, то соответствующее уравнение или неравенство умножают на -1.

2. Если система ограничений задана системой неравенств, то вводят добавочные неотрицательные переменные и тем самым сводят систему неравенств к эквивалентной системе уравнений, т.е. сводят задачу к канонической.

3. От данной или полученной после выполнения п. 2 системы уравнений с n переменными ($m < n$) переходят к системе ограничений в векторной форме и выбирают m базисных векторов. Проще всего за базисные взять векторы, компоненты которых являются коэффициентами при добавочных переменных. Находят соответствующее базисное решение, придавая небазисным векторам нулевые значения.

Если найденное базисное решение окажется опорным, то переходят к п. 5, если оно окажется недопустимым, то предварительно выполняют п. 4.

4. От полученного недопустимого базисного решения переходят к опорному или устанавливают, что система ограничений данной задачи противоречива.

5. Получив опорное решение, приводят базисные векторы к единичным и переходят к симплекс-таблице (схема симплекс-таблицы приведена в табл. 8).

Таблица 8

Базис	C базиса	A_0	C_1	C_2	…	C_n	Δi
			A_1	A_2	…	A_n	
$Z_j - C_j$							

Если отыскивается максимум (минимум) целевой функции и среди оценок $Z_j - C_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ (последняя строка), нет отрицательных (положительных) чисел, то критерий оптимальности выполнен и полученное опорное решение служит оптимальным, т.е. решение окончено.

6. Если при нахождении максимума (минимума) целевой функции среди оценок имеется одна или несколько отрицательных (положительных), то переходят к новому опорному решению. Из отрицательных (положительных) оценок выбирают наибольшую по абсолютной величине (наибольшую). Тем самым выбран направляющий столбец, например j.

7. В направляющем столбце находят отношения $\frac{b_i}{a_{ij}}$ для всех i, для которых $a_{ij} > 0$, и выбирают наименьшее. Выбрана направляющая строка.

8. Выбирают разрешающий элемент и проводят преобразования Жордана – Гаусса.

9. Повторяют п. 6–8 до тех пор, пока не будет достигнут критерий оптимальности (п. 5). Записывают оптимум целевой функции.

10. Если критерий оптимальности выполнен, а среди оценок нулевые соответствуют не только базисным вектором, то полученное оптимальное решение не единственное.

11. Если среди оценок имеются отрицательные в случае максимизации (положительные – в случае минимизации), а все числа этого столбца отрицательные или нулевые, то целевая функция не ограничена, т.е. $Z_{\max} = \infty$ ($Z_{\min} = -\infty$).

5.3. Метод искусственного базиса

Во многих задачах линейного программирования получение опорного плана описанным выше способом затруднительно. В этом случае для решения задач применяется метод искусственного базиса.

Пусть требуется найти максимум (минимум) функции $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ при ограничениях $(m < n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

и среди векторов

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \cdots, \ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

нет m единичных.

Задача, состоящая в определении максимального (или минимального) значения

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m}$$

(или, соответственно, $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \ldots + Mx_{n+m}$)

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n+m),$$

где M – некоторое достаточно большое положительное число, конкретное значение которого обычно не задается, называется ***расширенной по отношению к исходной***.

Расширенная задача имеет опорный план $(0; 0; \ldots; 0; b_1; b_2; \ldots; b_m)$, определяемый единичными векторами $A_{n+1}, A_{n+2}, \ \ldots, A_{n+m}$, образующими базис. Этот базис называется ***искусственным***, как и переменные x_{n+i} $(i=1,2,\dots,m)$. Так как расширенная задача имеет опорный план, ее решение может быть найдено симплекс-методом.

Теорема 5. *Если в оптимальном плане* $(x_1;x_2;\dots;x_n;0;\dots;0)$ *расширенной задачи искусственные переменные* $x_{n+i}=0$ $(i=1,2,\dots,m)$, *то план* $(x_1;x_2;\dots;x_m)$ *является оптимальным планом исходной задачи.*

Применение симплексного метода к расширенной задаче обеспечивает построение плана, в котором каждая из искусственных переменных $x_{n+i}=0$. Если первоначальная задача не обладает планами (т.е. она несовместна), то оптимальное решение расширенной задачи содержит по крайне мере одну переменную $x_{n+i}>0$.

Пример 14. Найти максимальное значение функции $Z=5x_1+3x_2+4x_3-x_4$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3, \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1,2,3,4).$$

Решим задачу методом искусственного базиса:

$$Z=5x_1+3x_2+4x_3-x_4-Mx_5-Mx_6,$$

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4+x_5=3, \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_6=3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1,2,\dots,6).$$

Выберем единичные векторы A_5 и A_6 в качестве базиса, который является искусственным. Составим симплекс-таблицу, содержащую на одну строку больше (табл. 9). Для удобства процесса в $(m+1)$-ю строку записываем слагаемое, независимое от *M*, а в $(m+2)$-ю – только коэффициенты при *M*. В $(m+2)$-й строке имеются отрицательные оценки, поэтому опорный план расширенной задачи не является оптимальным и его можно улучшить. В силу выбора величины *M* векторы A_5 и A_6 уже не могут попасть в базис, поэтому в последующих шагах симплекс-таблицы их можно исключить.

После третьего шага $(m+2)$-ю строку можно исключить, а дальнейший процесс проводить по $(m+1)$-й строке. На четвертом шаге находим оптимальный план $(1;0;1;0)$ и $Z_{\max}=9$.

Если в системе ограничений, заданной в векторной форме, среди векторов $A_1,A_2,\ \dots,A_n$ есть $k<m$ единичных базисных векторов, то в этом случае нужно ввести $(m-k)$ искусственных переменных.

Таблица 9

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 5$	$C_2 = 3$	$C_3 = 4$	$C_4 = -1$	$C_5 = -M$	$C_6 = -M$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_5	$-M$	3	1	3	2	2	1	0	(1)
A_6	$-M$	3	2	2	1	1	0	1	3/2
$Z_j - C_j$		0	–5	–3	–4	1	0	0	
		–6	–3	(–5)	–3	–3	0	0	
A_2	3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	3
A_6	$-M$	1	4/3	0	–1/3	–1/3	–2/3	1	(3/4)
$Z_j - C_j$		3	–4	0	–2	3	1	0	
		–1	(–4/3)	0	1/3	1/3	5/3	0	
A_2	3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	–1/4	(1)
A_1	5	3/4	1	0	–1/4	–1/4	–1/2	3/4	–
$Z_j - C_j$		6	0	0	(–3)	2	–1	3	
		0	0	0	0	0	1	1	
A_3	4	1	0	4/3	1	1	2/3	–1/3	
A_1	5	1	1	1/3	0	0	–1/3	2/3	
$Z_j - C_j$		9	0	4	0	5	1	2	
		0	0	0	0	0	1	1	

6 ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

6.1. Двойственные задачи

Рассмотрим две задачи линейного программирования:

Максимизировать функцию:

$$Z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Минимизировать функцию:

$$F = b_1y_1 + \ldots + b_my_m$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{21}y_1 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Эти задачи обладают следующими свойствами:

1. В одной задаче ищется максимум линейной формы, а в другой – минимум.

2. Коэффициенты при переменных в линейной форме одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи, наоборот, свободные члены системы ограничений одной задачи – коэффициентами при переменных в линейной форме другой задачи.

3. В каждой задаче система ограничений задается в виде неравенств, причем все они одного смысла, а именно: при нахождении максимума линейной формы эти неравенства имеют вид «≤», а при нахождении минимума – вид «≥».

4. Коэффициенты при переменных в системах ограничений записываются матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

и

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{m2} \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix},$$

которые являются транспонированными относительно друг друга.

5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных другой задачи.

6. Условия неотрицательных переменных сохраняются в обеих задачах.

Две задачи линейного программирования, удовлетворяющие указанным условиям, называются ***симметричными взаимно двойственными задачами***.

Таким образом, каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие симметричную двойственную задачу. Первоначальная задача называется исходной или прямой. Прямая и двойственная ей задача, взятые вместе, образуют пару взаимно двойственных задач, причем любую из них можно рассматривать как исходную, тогда другая окажется двойственной ей.

Для задачи, заданной в канонической форме, также можно поставить двойственную задачу:

Максимизировать функцию

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Минимизировать функцию

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n. \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

или

Минимизировать функцию

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Максимизировать функцию

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1, \\ a_{12}y_1 + \cdots + a_{m2}y_m \leq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Теорема 6. *Если одна из задач линейного программирования имеет конечный оптимум, то и двойственная к ней также имеет конечный оптимум, причем оптимальные значения линейных форм обеих задач совпадают, т.е.* $Z_{\max} = F_{\min}$ *или* $Z_{\min} = F_{\max}$. *Если же линейная форма одной из двойственных задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы*.

Рассмотрим систему ограничений прямой и двойственной симметричных задач. При решении симплекс-методом исходной задачи для сведения системы неравенств к эквивалентной ей системе уравнений нужно ввести m добавочных неотрицательных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$. Система ограничений двойственной задачи состоит из n неравенств, содержащих m переменных. Если решать эту задачу симплексным методом, то следует ввести n добавочных неотрицательных переменных y_{m+1}, $y_{m+2}, \ldots, y_{m+n}$.

Установим следующее соответствие между переменными в исходной и двойственной задачах:

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & & x_n & & x_{n+1} & x_{n+2} & & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & & y_{m+n} & & y_1 & y_2 & & y_m \end{array}$$

То есть каждой первоначальной переменной исходной задачи x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ставится в соответствие добавочная переменная y_{m+j}, введенная в j-е неравенство двойственной задачи, а каждой добавочной переменной x_{n+i} исходной задачи $(i = 1, 2, \ldots, m)$, введенной в i-е неравенство исходной задачи, – первоначальная переменная y_i двойственной задачи.

Теорема 7. *Компоненты оптимального решения одной из задач (прямой или двойственной) равны абсолютным величинам коэффициентов при соответствующих переменных в выражении линейной формы другой задачи (двойственной или прямой) при достижении ею оптимума и при условии, что полученное оптимальное решение не является вырожденным*.

Из теорем 6 и 7 следует, что если решить одну из взаимно двойственных задач, т.е. найти ее оптимальное решение и оптимум линейной формы, то можно записать оптимальное решение и оптимум линейной формы другой задачи.

Пример 15. Для производства трех видов изделий *A*, *B* и *C* используется три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в количестве, соответственно не большем 140, 250 и 244 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в табл. 10. Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается ее максимальная стоимость.

Таблица 10

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	*B*	*C*
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена единицы продукции (тыс. руб.)	10	14	12

Пусть производится x_1 изделий A, x_2 изделий B и x_3 изделий C. Найти максимальное значение функции $Z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$ при следующих условиях:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 140, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 250, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

В каноническом виде система ограничений примет вид

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 140, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 250, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_6 = 244, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \, (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

Решим задачу симплекс-методом (табл. 11): $Z_{\max} = 1110$, оптимальный план $(0; 57; 26)$. При данном плане производства остается неиспользованным 115 кг сырья второго вида.

Двойственная задача: найти минимум функции $F = 140y_1 + 250y_2 + 244y_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 12, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0.$$

На основании приведенных теорем, оптимальным решением двойственной задачи является $\left(\frac{23}{4}; 0; \frac{5}{4}\right)$, а $F_{\min} = 1110$.

Двойственная задача оценивает каждый из видов сырья, используемых для производства продукции. Оценки, приписываемые каждому из видов сырья, такие, что оценка всего используемого сырья минимальна, а суммарная оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида, – не меньше цены единицы продукции данного вида. Переменные y_1 и y_3 обозначают условные двойственные оценки сырья I и III видов соответственно. Эти оценки отличны от нуля, а сырье I и III видов полностью используется при оптимальном плане производства продукции. Двойственная оценка единицы сырья II вида равна нулю. Этот вид сырья не полностью используется при оптимальном плане производства продукции.

Таблица 11

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 10$	$C_2 = 14$	$C_3 = 12$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_4	0	140	4	2	1	1	0	0	(70)
A_5	0	250	3	1	3	0	1	0	250
A_6	0	244	1	2	5	0	0	1	122
$Z_j - C_j$		0	–10	(–14)	–12	0	0	0	
A_2	14	70	2	1	1/2	1/2	0	0	140
A_5	0	180	1	0	5/2	–1/2	1	0	72
A_6	0	104	–3	0	4	–1	0	1	26
$Z_j - C_j$		980	18	0	(–5)	7	0	0	
A_2	14	57	19/8	1	0	5/8	0	–1/8	
A_5	0	115	23/8	0	0	1/8	1	–5/8	
A_3	12	26	–3/4	0	1	–1/4	0	1/4	
$Z_j - C_j$		1110	$\frac{57}{4}$	0	0	$\frac{23}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	

Таким образом, положительную двойственную оценку имеют лишь те виды сырья, которые полностью используются при оптимальном плане производства изделий. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность используемого предприятием сырья. Кроме того, величина данной двойственной оценки показывает, на сколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества сырья соответствующего вида на 1 кг. Увеличение количества сырья I вида на 1 кг приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции увеличится на $\frac{23}{4}$ тыс. руб. и станет равной 1110 + + 5,75 = 1115,75. При этом числа, стоящие в столбце вектора A_4 (табл. 11), показывают, что указанное увеличение общей стоимости изготовляемой продукции может быть достигнуто за счет увеличения выпуска изделий B на $\frac{5}{8}$ ед. и сокращения выпуска изделий C на $\frac{1}{4}$ ед. Вследствие этого использование сырья II вида уменьшится на $\frac{1}{8}$ кг. Точно так же увеличение на 1 кг сырья III вида позволит найти новый оптимальный план производства, при котором общая стоимость возрастет на $\frac{5}{4}$ тыс. руб. из-за увеличения выпуска изделий C на $\frac{1}{4}$ ед. и уменьшения изготовления изделий B на $\frac{1}{8}$ ед., причем объем используемого сырья II вида возрастет на $\frac{5}{8}$ кг.

При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи первое выполняется как строгое неравенство. Это означает, что двойственная оценка сырья, используемого на производство одного изделия вида A, выше цены этого изделия и, следовательно, выпускать изделие вида A невыгодно. Его производство и не предусмотрено оптимальным планом прямой задачи. Второе и третье ограничения являются равенствами. Это означает, что двойственные оценки сырья, используемого для производства единицы изделий B и C соответственно, равны в точности их ценам, поэтому выпускать их экономически целесообразно, что и предусмотрено оптимальным планом прямой задачи.

6.2. Двойственный симплекс-метод

Двойственный симплекс-метод, как и симплекс-метод, используется при нахождении решения задачи линейного программирования, записанной в каноническом виде, для которой среди векторов $A_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ имеется m единичных. Вместе с тем двойственный симплекс-метод можно применять при решении задачи линейного программирования, свободные члены системы уравнений которой могут быть любыми числами (при решении задачи симплекс-методом в случае отрицательности хотя бы одного из этих чисел сначала искали опорное решение (разд. 5.1), а потом переходили к симплекс-таблице). При двойственном симплекс-методе сразу составляется симплекс-таблица. Если в столбце вектора A_0 имеются отрицательные числа, то выбирают наибольшее по абсолютной величине отрицательное число. В том случае, когда таких чисел несколько, берут какое-нибудь одно из них. Выбор этого числа определяет вектор, исключаемый из базиса. Пусть, например, это вектор A_l. Чтобы определить, какой вектор следует ввести в базис, находим

$$\min\left\{-\frac{Z_j - C_j}{a_{lj}}\right\} \text{ в задаче на максимум и}$$

$$\max\left\{-\frac{Z_j - C_j}{a_{lj}}\right\} \text{ в задаче на минимум,}$$

где $a_{lj} < 0$.

Тем самым определяется разрешающий элемент, и переход к новому шагу симплекс-таблицы производится по обычным правилам симплексного метода. Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока в столбце вектора A_0 не будет отрицательных чисел. Затем оптимальный план находят обычным симплексным методом. Если на некотором шаге окажется, что в *i*-й строке симплекс-таблицы в столбце вектора A_0 стоит отрицательное число, а среди остальных элементов этой строки нет отрицательных чисел, то исходная задача не имеет решения.

Пример 16. Найти двойственным симплекс-методом максимальное значение функции $Z = x_1 + x_2 + 2x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

В каноническом виде система ограничений примет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; (j = 1, 2, \ldots, 5).$$

Умножим второе и третье уравнения на –1 и перейдем к симплекс-таблице (табл. 12).

Выбираем третью строку (–6 – наибольшее по абсолютной величине отрицательное число), находим

$$\min\left\{-\frac{Z_j - C_j}{a_{3j}}\right\} = \min\left\{\frac{1}{1}; \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Таблица 12

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 1$	$C_2 = 1$	$C_3 = 2$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$-\frac{Z_j - C_j}{a_{lj}}$	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5		
A_3	2	8	1	1	1	0	0		
A_4	0	–4	–1	1	0	1	0		
A_5	0	(–6)	–1	–2	0	0	1	1	(1/2)
$Z_j - C_j$		16	1	1	0	0	0		
A_3	2	5	1/2	0	1	0	1/2		
A_4	0	(–7)	–3/2	0	0	1	1/2		
A_2	1	3	1/2	1	0	0	–1/2		
$Z_j - C_j$		13	1/2	0	0	0	1/2		
A_3	2	8/3	0	0	1	1/3	2/3		
A_1	1	14/3	1	0	0	–2/3	–1/3		
A_2	1	2/3	0	1	0	1/3	–1/3		
$Z_j - C_j$		32/3	0	0	0	1 / 3	2/3		

То есть из базиса выводим вектор A_5 и вводим A_2. Теперь в столбце A_0 стоит одно отрицательное число, рассмотрим элементы второй строки. Среди этих чисел есть одно отрицательное, выводим из базиса A_4 и вводим A_1. Найден оптимальный план $(14/3; 2/3; 8/3)$ и $Z_{\max} = 32/3$.

7 ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Значительная часть экономических задач, относящихся к задачам линейного программирования, требует целочисленного решения. К ним относятся задачи, у которых переменные величины означают количество единиц неделимой продукции, например, распределение производственных заданий между предприятиями, раскрой материалов, загрузка оборудования, распределение судов по линиям, самолетов по рейсам, а также задачи по производству неделимой продукции. Если единица составляет малую часть всего объема производства, то оптимальное решение находят обычным симплексным методом, округляя его до целых единиц, исходя из смысла задачи. В противном случае округление может привести к решению, далекому от оптимального целочисленного.

В общем случае ***задача целочисленного программирования*** формулируется следующим образом: найти максимум или минимум функции

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, i=1,2,\ldots,m,$$

$$x_j\geq 0, j=1,2,\ldots,n,$$

$$x_j, j=1,2,\ldots,n-\text{целые числа.}$$

Метод Гомори решения задач целочисленного программирования

Согласно методу Гомори задача линейного программирования сначала решается симплексным методом без учета целочисленности переменных. Если оптимальное решение оказывается целочисленным, то решение задачи заканчивается. Если оптимальное решение нецелочисленное, то из системы ограничений выбирается уравнение, для которого дробная часть координаты оптимального решения имеет наибольшее значение, и на его основе составляется дополнительное ограничение. Дополнительное ограничение отсекает от области допустимых решений нецелочисленное оптимальное решение, но при этом сохраняет целочисленные вершины этой области.

Пусть i-е ограничение задачи, находящееся в последней симплексной таблице, имеет вид

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij} x_j = x_i^*, \qquad (9)$$

где x_i – базисная переменная в уравнении; x_{ij} – коэффициенты при неизвестных (коэффициенты разложений векторов условий по базису опорного решения); x_j – свободные переменные в системе уравнений; x_i^* – правая часть уравнения (координата оптимального решения), которая является дробным числом. Тогда дополнительное ограничение имеет вид

$$q_i^* - \sum_{j=m+1}^{n} q_{ij} x_j \le 0, \qquad (10)$$

где q_i^* – дробная часть x_i^*; q_{ij} – дробная часть x_{ij}.

Целой частью действительного числа (антье) x_i называется наибольшее целое число, не превосходящее данное; обозначается $[x_i]$.

Дробной частью действительного числа x_i называется разность между этим числом и его целой частью; в общем случае обозначается $\{x_i\}$.

Дробная часть q_i числа x_i находится как разность числа и его целой части:

$$q_i = x_i - [x_i].$$

Например, для числа $\frac{7}{4}$ целая часть $\left[\frac{7}{4}\right] = 1$, дробная часть равна $\frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$. Для числа $-\frac{9}{5}$ целая часть $\left[-\frac{9}{5}\right] = -2$, дробная равна $-\frac{9}{5} - (-2) = \frac{1}{5}$. Дробная часть числа всегда неотрицательная и меньше единицы.

В неравенство (10) вводится дополнительная переменная x_{n+1}, получается уравнение

$$q_i^* - \sum_{j=m+1}^{n} q_{ij} x_j + x_{n+1} = 0. \qquad (11)$$

В систему ограничений задачи это ограничение записывается в виде

$$-\sum_{j=m+1}^{n} q_{ij}x_j + x_{n+1} = -q_i^*. \qquad (12)$$

После этого решение задачи продолжают двойственным симплекс-методом. Если получается целочисленное решение, то процесс решения заканчивается, в противном случае необходимо снова составить дополнительное ограничение.

Задача не имеет целочисленного решения, если оптимальное решение содержит координату с дробной частью и все коэффициенты соответствующего уравнения являются целыми.

Пример 17. Найти оптимальное целочисленное решение задачи

$$Z(X) = 3x_1 - x_2 - 5x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_3 \le 4, \\ x_1 - 3x_3 \le 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, x_j - \text{целые}, j = 1,2,3.$$

Приводим задачу к каноническому виду с помощью дополнительных переменных x_4, x_5:

$$Z(X) = 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_3 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, x_j - \text{целые}, j = 1,2,3,4,5,$$

и переходим к симполекс-таблице (табл. 13).

На втором шаге получили оптимальное решение $\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};0;0;\frac{5}{3}\right)$ с дробными координатами. Составляем дополнительное ограничение вида (12). Для этого используем ограничение, у которого правая часть имеет большую дробную часть (если они равны между собой, то для составления дополнительного ограничения используем любое уравнение). Находим дробные части правых частей уравнений (координат опорного решения): $4/3 - 1 = 1/3$; $1/3 - 0 = 1/3$, $5/3 - 1 = 2/3$. Большая дробная часть соответствует третьему уравнению. Находим дробные части коэффициентов этого уравнения: $\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$; $0 - 0 = 0$; $-\frac{11}{3} - (-4) = \frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3} - (-1) = \frac{2}{3}$; $1 - 1 = 0$.

Таблица 13

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 3$	$C_2 = -1$	$C_3 = -5$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	Δ_i
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_2	–1	7	5	1	4	0	0	7/5
A_4	0	4	3	0	2	1	0	(4/3)
A_5	0	3	1	0	–3	0	1	3/1
$Z_j - C_j$		–7	(–8)	0	1	0	0	
A_2	–1	1/3	0	1	2/3	–5/3	0	0
A_1	3	4/3	1	0	2/3	1/3	0	0
A_5	0	5/3	0	0	–11/3	–1/3	1	0
$Z_j - C_j$		11/3	0	0	19/3	8/3	0	0
A_6	0	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	1
A_2	–1	2	0	1	3/2	0	0	–5/2
A_1	3	1	1	0	1/2	0	0	1/2
A_5	0	2	0	0	–7/2	0	1	–1/2
A_4	0	1	0	0	1/2	1	0	–3/2
$Z_j - C_j$		1	0	0	5	0	0	4

Составляем дополнительное ограничение: $-\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_6 = -\frac{2}{3}$. Записываем это уравнение после строки оценок. Вектор A_6 включаем в число базисных неизвестных. Опорное решение $\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};0;0;\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$ является почти допустимым. Выводим вектор A_6 из базиса, так как дополнительное ограничение имеет в правой части отрицательную величину $\min\left\{-\frac{Z_j - C_j}{a_{6j}}\right\} = \min\left\{\frac{19/3}{1/3};\frac{8/3}{2/3}\right\} = 4$. Вводим в базис вектор A_4. Новое опорное решение $(1;2;0;1;2;0)$, содержит целые координаты. Следовательно, это и есть оптимальное решение: $Z_{\max}(X) = Z(1;2;0) = 1$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Решить графическим методом задачу линейного программирования

1. $Z(x) = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \le 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2. $Z(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 6 \ge 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7 \ge 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - 8 \le 0, \\ x_1 - 1 \ge 0, \end{cases}$$

$x_2 \ge 0.$

3. $Z(x) = 3x_1 - 15x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 + x_2 \ge 10, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

4. $Z(x) = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4 \le 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 4 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6 \le 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

5. $Z(x) = 2x_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 3 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 7 \le 0, \\ x_1 - 2 \le 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

6. $Z(x) = 15x_1 + 21x_2 - 20 \to \text{extr},$

$$\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ x_1 + 11x_2 \le 13, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 20, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

7. $Z(x) = 31/3 + x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, 5.$

8. $Z(x) = 33 - 3x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 21, \\ 4x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 13, \\ \quad x_1 + x_2 - x_6 = 3, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 6.$

9. $Z(x) = 3x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -22, \\ \quad -6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ \quad 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 17, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 5.$

10. $Z(x) = 11x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ \quad 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 18, \\ \quad 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 5.$

Составить математические модели следующих задач с экономическим содержанием и решить их

11. Для изготовления изделий двух типов А и Б имеется 200 кг металла. На изготовление одного изделия типа А расходуется 2 кг металла, а одного изделия типа Б – 4 кг. Составить план производства, обеспечивающий получение наибольшей выручки от продажи изготовленных изделий, если одно изделие типа А стоит 50 руб., а одно изделие типа Б стоит 70 руб., причем изделий типа А можно изготовить не более 60, а изделий типа Б – не более 30.

12. Из пункта А в пункт Б ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В таблице указаны наличный парк вагонов разных типов, из которых ежедневно можно комплектовать данные поезда, и количество пассажиров, вмещающихся в каждом из вагонов.

1) Определить оптимальные количества скорых и пассажирских поездов, при которых число перевозимых пассажиров достигает максимума.

2) Определить оптимальное число поездов (скорых и пассажирских), обеспечивающих максимальное количество перевозимых пассажиров, при условии, что в день железная дорога не может пропускать более шести пассажирских поездов.

Поезда	Багаж.	Почтов.	Плацк.	Купейный	Мягкий
Количество вагонов в скором поезде	1	1	5	6	3
Количество вагонов в пассажирском поезде	1	–	8	4	1
Число пассажиров	–	–	58	40	32
Парк вагонов	12	8	81	70	26

Найти начальное опорное решение и путем перебора опорных решений определить оптимальное решение задачи

13. $Z(x) = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$

14. $Z(x) = 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 8, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$

Решить симплексным методом следующие задачи

15. $Z(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,5.$

16. $Z(x) = x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 25, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,5.$

17. $Z(x)=5x_1+x_2-3x_3+2x_4\to\min,$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+x_4=7, \\ 5x_1+3x_2+x_3+2x_4=11, \end{cases}$$

$x_j\ge 0,\ j=1,2,3,4.$

18. $Z(x)=2x_1-x_2+3x_4+2x_5+4\to\min,$

$$\begin{cases} x_1-2x_3+x_3-3x_5=2, \\ 2x_1+x_2+4x_3+x_5=6, \\ -x_1+2x_2+3x_4=4, \end{cases}$$

$x_j\ge 0,\ j=1,2,\dots,5.$

19. $Z(x)=-6x_1+3x_2+3x_4\to\max,$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_4\ge 18, \\ 2x_1+x_2+2x_4\le -9, \\ 2x_1-4x_2+2x_3=10, \end{cases}$$

$x_j\ge 0,\ j=1,2,3,4.$

20. $Z(x)=x_1+x_2+x_3-x_4\to\max,$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=12, \\ x_1+2x_2+x_3\le 20, \\ x_1+x_2+x_3\le 20, \end{cases}$$

$x_j\ge 0,\ j=1,2,3,4.$

21. $Z(x)=6x_1-2x_2-8x_3\to\min,$

$$\begin{cases} x_2-x_3\ge -2, \\ -5x_1+x_2+x_3=4, \\ -8x_1+x_2+2x_4+3x_5=25, \end{cases}$$

$x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$

22. $Z(x)=-2x_1-4x_2-2x_3\to\min,$

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3\le 4, \\ -x_1+x_2+3x_3\le 6, \\ x_1-3x_2+x_3\le 2, \end{cases}$$

$x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$

23. Производитель элементов центрального отопления изготавливает радиаторы четырех моделей. Ограничения на производство обусловлены количеством рабочей силы и количеством стальных листов, из которых изготавливаются радиаторы.

Решить эту задачу с максимизацией прибыли в качестве целевой функции, используя симплекс-метод.

Модель радиатора	*A*	*B*	*C*	*D*
Необходимое количество рабочей силы, человеко-часы	0,5	1,5	2	1,5
Необходимое количество стального листа, м^2	4	2	6	8
Прибыль от продажи одного радиатора, долл.	5	5	12,5	10

24. Небольшая фирма производит два типа подшипников *A* и *B*, каждый из которых должен быть обработан на трех станках, а именно: на токарном, шлифовальном и сверлильном. Время, требуемое для каждой из стадий производственного процесса, приведено в таблице.

Тип подшипника	Время обработки, ч			
	Токарный станок	Шлифовальный станок	Сверлильный станок	Прибыль от продажи одного подшипника, руб.
A	0,01	0,02	0,04	80
B	0,02	0,01	0,01	125
Полное возможное время работы в неделю, ч	160	120	150	

Фирма хотела бы производить подшипники в количествах, максимизирующих ее прибыль. Сформулировать задачу как задачу линейного программирования и решить симплекс-методом. Проверить решение графически.

25. Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевизора, Интернета, газет и афиш. Из различных рекламных экспериментов, которые проводились в прошлом, известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 3, 7 и 4 долл. в расчете на 1 долл., затраченный на рекламу. Распределение рекламного бюджета по различным средствам подчинено следующим ограничениям:

а) полный бюджет не должен превосходить 500000 долл.;

б) следует расходовать не более 40 % бюджета на телевидение и не более 20 % бюджета на афиши;

в) вследствие привлекательности для подростков Интернета на него следует расходовать по крайней мере половину того, что планируется на телевидение.

Требуется сформулировать задачу распределения средств по различным источникам как задачу линейного программирования и использовать симплекс-метод для ее решения.

Решить задачи методом искусственного базиса

26. $Z(x) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$

27. $Z(x) = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 4, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,5.$

28. $Z(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 4, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,5.$

29. $Z(x) = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 12, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$

Для каждой из следующих задач составить двойственную и, решая одну из них, определить решения обеих задач

30. $Z(x) = 6x_1 + 6x_2 + 8x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 1053, \\ 15x_1 + 9x_2 + 10x_3 \le 1170, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 325, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

31. $Z(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, 5.$

32. $Z(x) = x_1 - x_2 - x_3 - 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

33. $Z(x) = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - 3x_5 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 3x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 6, \\ x_3 - 4x_4 - x_5 + 2x_6 = 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, 6$

34. $Z(x) = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 18, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \ge 24, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 30, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

35. $Z(x) = -2x_1 + x_2 - -3x_3 + 2x_4 + 10x_5 + 6 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 5, \\ \quad -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, 5.$

36. Производитель выпускает два продукта: продукт *P*, продаваемый по 2000 долл. за 1 т, и продукт *Q*, продаваемый по 1000 долл. за 1 т. Продукты могут производиться из двух типов сырья: *A* по 600 долл. за 1 т и *B* по 900 долл. за 1 т. Из каждых 100 т сырья *A* производят 30 т *P* и 50 т *Q*, а из 100 т сырья *B* производят 60 т *P* и 10 т *Q*. Если производитель обрабатывает x т *A* и y т *B*, покажите, что его прибыль составляет $(500x + 400y)$. Фабрика способна обработать не более 10000 т сырья ежегодно. Поставщики сырья могут обеспечить не более 6000 т сырья *A* и не более 8000 т сырья *B* в год. Производитель может продавать ежегодно по 5000 т продукта *P* и до 3200 т продукта *Q*.

а) Необходимо определить, сколько сырья *A* и *B* должно быть заказано для максимизации его прибыли, показать, что эта прибыль составляет 4550000 дол. Поставщики сырья *A* угрожают повысить цену.

б) На сколько можно поднять цену, чтобы производителю пришлось изменить заказ?

37. Фабрика производит три основных типа товара. Изделию типа I требуется 3 единицы сырья *A* и единица сырья *B*; оно приносит прибыль в 3 единицы. Изделию типа II требуется 4 единицы сырья *A* и 3 единицы сырья *B*; оно приносит прибыль в 6 единиц. Изделию типа III требуется единица сырья *A* и 2 единицы сырья *B*; оно приносит прибыль в 2 единицы.

Найдите оптимальный план производства, если доступны всего 20 единиц сырья *A* и 10 единиц сырья *B*. Если окажется доступной еще одна единица сырья *A* (или *B*), какую наибольшую цену следует за нее платить?

38. Аудитории и лаборатории университета рассчитаны не более чем на 500 студентов. Университет не принимает более 4000 студентов своей страны, но разрешает прием любого количества иностранных студентов. Персонал университета составляет 440 человек. Для обучения 12 студентов данной страны и 10 иностранных студентов требуется один преподаватель. Необходимо, чтобы 40 % студентов данной страны и 80 % иностранных студентов могли разместиться в аудиториях, где имеется 2800 мест. Университет получает 2000 фунтов стерлингов в год из правительственных средств на каждого студента своей страны и берет плату в размере 3000 фунтов стерлингов в год за каждого иностранного студента. Предположив, что единственной целью университета является максимизация прибыли, определите, какой прием студентов своей страны и иностранных студентов следует планировать. Покажите, что максимальный годовой доход составляет 11850000 фунтов стерлингов в год. Университет может нанять дополнительный персонал с годовым окладом 10000 фунтов стерлингов. Выгодно ли это?

Решить задачи целочисленного программирования

39. $Z(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + 4x_2 + x_5 = 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 13, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,\ x_j -$ целые.

40. $Z(x) = x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 \leq 10, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 \leq 14, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,\ x_j -$ целые.

41. $Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 3, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,\ x_j -$ целые.

42. $Z(x) = 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ -2x_2 + 3x_3 \leq 4, \\ -3x_2 + 4x_3 \leq 7, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,\ x_j -$ целые.

Ответы

1. $\frac{22}{5}$. **2.** ∞. **3.** Решений нет. **4.** 6 (оптимальное решение не единственное). **7.** 20. **8.** 20. **9.** –53. **10.** $-\infty$. **11.** $Z_{\max} = Z(60;20) = 4400$ руб.

12. а) $(5;7)$; б) $(6;6)$. **13.** $Z(x)=8$ при $(0;0;2;1)$. **14.** $Z(x)=-20$ при $X=(0;4;1;0)$. **15.** $Z_{\max}(8;0;11;7;0)=6$. **16.** $Z_{\max}=+\infty$. **17.** $Z_{\min}(0;0;3;4)=-1$. **18.** $Z_{\min}\left(\frac{22}{13};\frac{34}{13};0;\frac{2}{13};0\right)=\frac{68}{13}$. **19.** Система условий несовместна. **20.** $Z(8;4;0;0)=Z(4;8;0;0)=12$. **21.** $Z(2;6;8)=-64$. **22.** $Z=-\infty$. **23.** x_i – количество радиаторов каждой модели, $(400;0;150;0)$, прибыль 3875 долл. **24.** $x_A=2000$, $x_B=7000$, прибыль 1035 тыс. руб. **25.** 200000 – на телевизоры, 100000 – на Интернет, 100000 – на газеты, 100000 – на афиши. **26.** Система ограничений несовместна. **27.** $\max Z(X)=11$ при $X=(3;3;2;0;0)$. **28.** $+\infty$. **29.** $\min Z(x)=-74$ при $X=(0;28;16)$. **30.** $Z_{\max}=Z(40;0;57)=696$. **31.** $Z_{\max}=Z\left(\frac{22}{13};\frac{34}{13};0;\frac{2}{13};0\right)=\frac{68}{13}$. **32.** $Z_{\min}=Z\left(\frac{1}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{4}\right)=-\frac{46}{3}$. **33.** $Z=-\infty$. **34.** $Z_{\max}=Z(0;12;0;6)=-126$. **35.** $Z_{\min}=Z(1;3;2;0;0)=1$. **36.** а) 5500 т сырья типа A, 4500 т сырья типа B; б) 100 долл. **37.** $x_1=4$, за A следует заплатить 0,6, за B – 1,2. **38.** 2700 студентов своей страны, 2150 иностранных. Да, это выгодно. **39.** 19 при $X=(2;2;1;0;1)$. **40.** 19 при $X=(1;2;0;0)$. **41.** 6 при $X=(0;3;0;1;7;9)$. **42.** –6 при $X=(2;1;2)$.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ И ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РАБОТ

1. Решить графическим методом задачи с двумя переменными.

1.1. $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \ge -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

1.2. $Z(X) = 5x_1 - 3x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

1.3. $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \le 3, \\ -5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ x_1 - 3x_2 \le 3, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

1.4. $Z(X) = 2x_1 + 2x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ 4x_1 - x_2 \le 20, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

1.5. $Z(X) = 2x_1 + 4x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

1.6. $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \ge -2, \\ 4x_1 - x_2 \le 16, \\ 2x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

1.7. $Z(X) = 15x_1 + 10x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

1.8. $Z(X) = 2x_1 + 5x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ x_1 \le 4, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

1.9. $Z(X)=x_1-3x_2\to\min,$

$$\begin{cases}-x_1+2x_2\le 12,\\ 2x_1-x_2\le 6,\\ -x_1+x_2\le 3,\\ 2x_1+x_2\le 6.\end{cases}$$

1.10. $Z(X)=3x_1+2x_2\to\max,$

$$\begin{cases}2x_1-x_2\ge 0,\\ -x_1+2x_2\le 3,\\ x_2\le 3,\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

1.11. $Z(X)=2x_1+4x_2\to\min,$

$$\begin{cases}2x_1+x_2\ge 9,\\ x_1+2x_2\le 15,\\ x_1+2x_2\ge 9,\\ 2x_1+x_2\le 15,\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

1.12. $Z(X)=-2x_1-x_2\to\max,$

$$\begin{cases}-x_1+x_2\le 2,\\ 2x_1+3x_2\ge 16,\\ x_1+x_2\le 10,\\ 2x_1-x_2\le 8,\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$

1.13. $Z(X)=2x_1+3x_2\to\min,$

$$\begin{cases}x_1+x_2\ge 2,\\ x_1-x_2\le 0,\\ 3x_1+x_2\ge 6,\\ 3x_1-x_2\ge 6.\end{cases}$$

1.14. $Z(X)=x_1-2x_2\to\min,$

$$\begin{cases}2x_1-x_2\ge -2,\\ -x_1+2x_2\le 7,\\ -4x_1+3x_2\ge -12,\\ x_1+3x_2\ge 18.\end{cases}$$

1.15. $Z(X)=3x_1+6x_2\to\max,$

$$\begin{cases}-4x_1+x_2\ge 0,\\ x_1-x_2\ge -3,\\ 2x_1-3x_2\le 6,\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

1.16. $Z(X)=5x_1+5x_2\to\max,$

$$\begin{cases}-2x_1+x_2\le 2,\\ -x_1+3x_2\ge -9,\\ x_1+x_2\ge 3,\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

1.17. $Z(X)=-3x_1-x_2\to\min,$

$$\begin{cases}4x_1-x_2\ge 0,\\ 2x_1-x_2\le 0,\\ x_1+x_2\le 3,\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

1.18. $Z(X)=5x_1-x_2\to\min,$

$$\begin{cases}2x_1-3x_2\le 0,\\ -5x_1+9x_2\le 45,\\ x_1-2x_2\le 4,\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

1.19. $Z(X)=4x_1+2x_2\to\min,$

$$\begin{cases}-3x_1+2x_2\le 6,\\ -x_1+2x_2\ge 10,\\ x_1-3x_2\le 6,\\ x_1+x_2\ge 3,\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

1.20. $Z(X)=-x_1-x_2\to\min,$

$$\begin{cases}-3x_1+2x_2\le 4,\\ -x_1+2x_2\le 8,\\ x_1+x_2\ge 10,\\ 4x_1-x_2\le 20,\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

1.21. $Z(X)=2x_1+3x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} x_1+2x_2 \ge 2, \\ x_1+x_2 \ge 2, \\ 2x_1+x_2 \ge 4, \\ 2x_1-3x_2 \le 0, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0.$

1.22. $Z(X)=4x_1+6x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 4x_1-5x_2 \ge 0, \\ 2x_1-3x_2 \le 0, \\ 2x_1+3x_2 \ge 6, \\ 2x_1+x_2 \ge 2. \end{cases}$$

1.23. $Z(X)=-x_1+4x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 2x_1-3x_2 \le 6, \\ 3x_1-2x_2 \le 6, \\ 2x_1+3x_2 \ge 0, \\ x_1+x_2 \ge -1, \end{cases}$$
$x_2 \ge 0.$

1.24. $Z(X)=x_1+4x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \ge 6, \\ -2x_1+3x_2 \ge 6, \\ x_1+x_2 \le 3, \\ 2x_1-3x_2 \le 0, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

1.25. $Z(X)=x_1-4x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1-3x_2 \le 0, \\ x_1-x_2 \ge 0, \\ 2x_1+x_2 \ge 6, \\ 2x_1+3x_2 \le 18, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

1.26. $Z(X)=-5x_1+x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1-3x_2 \ge 0, \\ x_1+3x_2 \ge 9, \\ x_1-3x_2 \le 3, \\ -x_1+3x_2 \le 3, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

1.27. $Z(X)=4x_1+3x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \ge 0, \\ 2x_1+x_2 \ge 4, \\ 3x_1-x_2 \ge 0, \\ 2x_1+3x_2 \ge 12, \end{cases}$$
$x_2 \ge 0.$

1.28. $Z(X)=3x_1-x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} -3x_1+2x_2 \le 6, \\ 2x_1-3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 6, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

1.29. $Z(X)=3x_1-x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1-x_2 \le 4, \\ -x_1+x_2 \le 2, \\ 3x_1-2x_2 \ge 0, \\ x_1-x_2 \le 0. \end{cases}$$

1.30. $Z(X)=3x_1+4x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 4x_1-x_2 \ge 0, \\ -x_1+x_2 \le 3, \\ 3x_1+2x_2 \ge 6, \\ 2x_1-5x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2. Решить следующие задачи линейного программирования с n переменными:

а) графическим методом;

б) методом искусственного базиса.

2.1. $$Z(X) = 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} 13x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8, \\ -7x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$$

2.2. $$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \qquad + 7x_4 = 21, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -12, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$$

2.3. $$Z(X) = 4x_1 + 13x_2 + 3x_3 + 6x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$$

2.4. $$Z(X) = x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 11x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$$

2.5. $$Z(X) = 11x_2 + x_3 + 4x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 11x_1 - 11x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 11, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$$

2.6. $$Z(X) = 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 13x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 19, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 16, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$$

2.7. $$Z(X) = 12x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} -6x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ 11x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 7, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$$

2.8. $Z(X) = x_1 - 19x_2 - 5x_3 - 7x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ -6x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.9. $Z(X) = 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} -10x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 18, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.10. $Z(X) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 10, \\ -x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -2, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.11. $Z(X) = -22x_1 + 19x_2 - 5x_3 - 6x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 - 13x_2 + 7x_3 - x_4 = -1, \\ -4x_1 + 18x_2 - 10x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.12. $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 8x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 20, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.13. $Z(X) = -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.14. $Z(X) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 - 8x_2 + x_3 + 6x_4 = -2, \\ 3x_1 + 27x_2 - 4x_3 - 22x_4 = -2, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.15. $Z(X) = 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 \qquad +3x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 7, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

2.16. $Z(X) = 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ 5x_1 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

2.17. $Z(X) = 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ \qquad 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

2.18. $Z(X) = 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 8x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 12, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 4, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

2.19. $Z(X) = x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -6x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

2.20. $Z(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

2.21. $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 18x_4 \to \min$,

$$\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = -8, \\ 4x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 12, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

2.22. $Z(X) = 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.23. $Z(X) = x_1 - 2x_2 + 3x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 8, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.24. $Z(X) = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.25. $Z(X) = 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.26. $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.27. $Z(X) = 7x_1 + 10x_3 + 6x_4 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 8, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.28. $Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.29. $Z(X) = -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 6x \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

2.30. $Z(X) = 4x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 8x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

3. Решить симплексным методом задачи.

3.1. $Z(X) = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.2. $Z(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.3. $Z(X) = x_1 - x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \le 24, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.4. $Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.5. $Z(X) = x_1 - 8x_2 - 3x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le -4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.6. $Z(X) = -x_1 - 3x_2 - x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le -2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.7. $Z(X) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 18, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 10, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.8. $Z(X) = -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 \ge -4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.9. $Z(X) = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \le 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.10. $Z(X) = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 13, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 11, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.11. $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \ge 11, \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -23, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \ge -2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.12. $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 \le -2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ x_1 \qquad\quad + 2x_3 = 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.13. $Z(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 \le -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 \qquad\quad + x_3 \le 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.14. $Z(X) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 \ge -6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.15. $Z(X) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 2, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 \ge 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.16. $Z(X) = -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

3.17. $Z(X) = -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_1 \qquad + x_3 \leq 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$

3.18. $Z(X) = -2x_1 + 8x_2 + 3x_3 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -8, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$

3.19. $Z(X) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 \geq -2, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$

3.20. $Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 12, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$

3.21. $Z(X) = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geq -7, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$

3.22. $Z(X) = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -4, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$

3.23. $Z(X)= x_1+3x_2+x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3 \ge 6, \\ x_1+3x_2+x_3 = 10, \\ x_1-3x_2+x_3 \ge -6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=1,2,3.$

3.24. $Z(X)=2x_1+3x_2+2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3 = 2, \\ -3x_1-6x_2+3x_3 \ge -5, \\ 4x_1+3x_2-x_3 = 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=1,2,3.$

3.25. $Z(X)=2x_1+2x_2-5x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2+3x_3 \ge 12, \\ x_1-x_2+x_3 \ge -2, \\ 2x_1-x_2+2x_3 = 24, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=1,2,3.$

3.26. $Z(X)=x_1+2x_2+2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1-x_2+4x_3 \le -1, \\ x_1-2x_2+2x_3 = 2, \\ x_1+2x_2-2x_3 \le 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=1,2,3.$

3.27. $Z(X)=5x_1+7x_2+9x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3 = 6, \\ x_1-2x_2-x_3 \ge -8, \\ -2x_1+x_2+2x_3 \ge 16, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=1,2,3.$

3.28. $Z(X)=x_1+x_2-4x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1-3x_2+2x_3 \le -3, \\ -x_1+2x_2+x_3 \le 5, \\ x_1-x_2-3x_3 = 7, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=1,2,3.$

3.29. $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 \le -6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

3.30. $Z(X) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 \qquad - x_3 \ge -4, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие / И. Л. Акулич. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Высш. шк., 1993. – 336 с.

2. Ашманов, С. А. Линейное программирование [Текст] / С. А. Ашманов. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 340 с.

3. Банди, Б. Основы линейного программирования [Текст] : пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1989. – 176 с.

4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. [Текст] : учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд. – М. : Высшая школа, 2003. – Ч. 1. – 304 с.

5. Калихман, И. Л. Сборник задач по математическому программированию [Текст] / И. Л. Калихман. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : Высш. шк., 1975. – 270 с.

6. Карасев, А. И. Курс высшей математики для экономических вузов. Ч. II. Теория вероятностей и математическая статистика. Линейное программирование [Текст] : учеб. пособие для студентов вузов / А. И. Карасев, З. М. Аксютина, Т. И. Савельева. – М. : Высш. шк., 1982. – 320 с.

7. Карпелевич, Ф. И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования [Текст] : учеб. пособие для технических вузов / Ф. И. Карпелевич, Л. Е. Садовский. – 3-е изд. испр. и доп. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – 312 с.

8. Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – М. : Высш. шк., 1976. – 352 с.

9. Лунгу, К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач [Текст] / К. Н. Лунгу. – М. : Физматлит, 2005. – 128 с.

10. Микиша, А. М. Математика: основные термины: Толковый словарь: Более 3000 терминов [Текст] / А. М. Микиша. – М. : Астрель, 2003. – 448 с.

11. Сборник задач по высшей математике для экономистов : учеб. пособие [Текст] / под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд., испр. – М. : ИНФРА-М, 2009. – 575 с. – (Высшее образование).

12. Солодовников, А. С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование [Текст] / А. С. Солодовников. – М. : Просвещение, 1966. – 184 с.

13. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций [Текст] / Хемди А. Таха. : пер. с англ. – 7-е изд. – М. : Вильямс, 2005. – 912 с.

Учебное издание

Болотникова Ольга Васильевна,
Тарасов Дмитрий Викторович,
Тарасов Роман Викторович

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ: СИМПЛЕКС-МЕТОД И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Редактор А. Г. Темникова
Технический редактор Д. В. Тарасов
Компьютерная верстка Д. В. Тарасова
Дизайн обложки А. А. Стаценко

Подписано в печать 15.10.2015. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 4,88.
Заказ № 863. Тираж 50.

Пенза, Красная, 40, Издательство ПГУ
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru